



# اثر برهم کنش دوقطبی– دوقطبی بر دینامیک درهم تنیدگی در یک سامانه سه اتمی

شهربانو اكبرى، محمدكاظم توسلى، مهناز قاسمى

گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

shakbari9574@gmail.com, mktavassoly@yazd.ac.ir, m.ghasemi@stu.yazd.ac.ir

چکیده- در این مقاله، درهم تنیدگی تولید شده به واسطه برقراری برهم کنش اتم– میدان در یک کاواک تکمد را مورد بررسی قرار میدهیم. سه اتم دوترازی (مدل تاویز –کامینگز) در یک کاواک تکمد در حال برهم کنش با میدان هستند. با در نظر گرفتن برهم کنش دوقطبی– دوقطبی بین هر جفت اتم، تحول سامانه مورد مطالعه قرار میگیرد. در نهایت، درهم تنیدگی جفتهای اتمی و نیز درهم تنیدگی یک اتم با دو اتم دیگر با سنجه تلاقی محاسبه میشود. نتایج نشان میدهد که با تنظیم پارامترها میتوان به بیشینه مقدار درهم تنیدگی دست یافت. هم چنین، مقادیر درهم تنیدگی ایجاد شده بعد از برهم کنش، حتی با انتخاب حالت اولیه جداپذیر برای اتمها، قابل قبول است.

کلید واژه- برهم کنش اتم- میدان، تلاقی، درهم تنیدگی، مدل تاویز- کامینگز.

# The influence of dipole-dipole interaction on the entanglement dynamics in a three-atom system

Shahrbanoo Akbari, Mohammad Kazem Tavassoly, Mahnaz Ghasemi

**Optics and Laser Group, Faculty of Physics, Yazd University** 

Abstract- In this paper, we investigate the produced entanglement by performing atom-field interaction in a single-mode cavity. Three two-level atoms (Tavis-Cummings model) are interacting with the field in a single-mode cavity. By considering dipole-dipole interaction between each pair of atoms, evolution of the system is studied. Finally, the entanglement of atomic pairs as well as the entanglement of one atom with the other two atoms are calculated via concurrence measure. The results show that the maximum of entanglement is achieved with appropriate choices of the involved parameters. Also, the amounts of produced entanglement after the interaction are acceptable even with selecting the separable initial state for atoms.

Keywords: Atom-field interaction, Concurrence, Entanglement, Tavis-Cummings model.



#### مقدمه

به دلیل اهمیت درهمتنیدگی در پردازش اطلاعات کوانتومی، محاسبات کوانتومی و همچنین نقش کلیدی آن در فناوریهای کوانتومی [۱]، مطالعه و بررسی این پدیده بسیار مورد توجه است. درهمتنیدگی بین اجزاء یک سامانه می تواند با ایجاد برهم کنش بین اجزای آن برقرار شود [۲]. همچنین، این ویژگی با استفاده از شکافنده پرتو نیز قابل توليد است [٣]. در حقيقت، وجود درهم تنيد گي بين زیرسامانه های یک سامانه منجر به جدانایذیری حالتهای زیرسامانه ها از یکدیگر می شود. مدل جینز - کامینگز یکی از مدلهای معتبر برای توصیف برهم کنش اتم با میدان کوانتومی است [۴]. این مدل قابل گسترش است و میتوان با افزایش تعداد اتمها (مدل تاویز - کامینگز) و در نظر گرفتن برهم كنش دوقطبي- دوقطبي بين اتمها، تحولات سامانه را مورد مطالعه و بررسی قرار داد. وجود برهم کنش توصيف شده با مدل جینز-کامینگز یا تاویز-کامینگز منجر به ایجاد درهمتنیدگی میشود که میتوان آن را با سنجه تلاقی مورد بررسی قرار داد [۵].

#### مدل سامانه و روابط پایه

سامانه مورد مطالعه متشکل از سه اتم دوترازی A، B و C و است که این سه اتم با یک میدان تکمد کوانتومی در یک کاواک در حال برهم کنش هستند. گاهی این مدل به مدل تاویز- کامینگز شناخته می شود [۶]. این برهم کنش با هامیلتونی زیر توصیف می شود:

 $\hat{H} = v\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \sum_{k=A,B,C} \left[\frac{\omega_k}{2}\hat{\sigma}_k^z + g_k \left(\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_k^- + \hat{a}\hat{\sigma}_k^+\right)\right],\tag{1}$ 

که مجموع دو جمله اول هامیلتونی (۱) به عنوان بخش غیربرهم کنشی هامیلتونی،  $\hat{H}_0$  نام دارد که جملات اول و دوم آن به ترتیب هامیلتونیهای آزاد میدان و اتم است. جمله آخر نیز به واسطه برهم کنش اتم- میدان وارد شده است که بخش برهم کنشی هامیلتونی است ( $\hat{H}_1$ ). در هامیلتونی (۱)، V و  $\omega_k$  به ترتیب نشان دهنده بسامد



بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران، دانشگاه شهید چمران اهواز، خوزستان، ایران. ۱۴۰۰ بهمن ۱۴۰۰

میدان تکمد و بسامد گذار اتمی اتم k-ام است. همچنین،  $g_k$  ثابت جفتشدگی اتم- میدان بین اتم k-ام و میدان را مشخص میکند.  $\hat{a}(\hat{a})$  عملگر آفرینش (نابودی) میدان و عملگرهای  $\sigma_k^+, \sigma_k^-$  و  $\sigma_k^-, \sigma_k^-$  به ترتیب عملگرهای پایین آورنده، بالابرنده و وارونی جمعیت اتمی اتم k-ام هستند که به ترتیب به شکل زیر تعریف می شوند:

 $\hat{\sigma}_{k}^{-} = |g\rangle_{k} \langle e|, \qquad \hat{\sigma}_{k}^{+} = |e\rangle_{k} \langle g|, \qquad (\Upsilon)$   $\hat{\sigma}_{k}^{z} = |e\rangle_{k} \langle e| - |g\rangle_{k} \langle g|, \qquad (\Upsilon)$ 

در اینجا حالتهای  $_{k}\left|e\right
ight
angle_{k}$  و  $_{k}\left|g
ight
angle_{k}$  به ترتیب نشان دهنده تراز برانگیخته و پایه اتم k-ام است. حالت اولیه اتمها به صورت کلی زیر در نظر گرفته میشود:

 $\left|\phi\right\rangle_{ABC} = \left(\cos\alpha \left|egg\right\rangle + \sin\alpha \left|gee\right\rangle\right)_{ABC}.$  (°)

همچنین، حالت اولیه میدان نیز خلاء است. با اضافه کردن جملات مربوط به برهمکنش دوقطبی- دوقطبی با ثابتهای جفتشدگی k<sub>B</sub>,k<sub>A</sub> و k<sub>C</sub> به هامیلتونی (۱) داریم:

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= v \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \sum_{k=A,B,C} \left[ \frac{\omega_{k}}{2} \hat{\sigma}_{k}^{z} + g_{k} \left( \hat{a}^{\dagger} \hat{\sigma}_{k}^{-} + \hat{a} \hat{\sigma}_{k}^{+} \right) \right] \\ &+ k_{A} \left( \hat{\sigma}_{A}^{+} \hat{\sigma}_{B}^{-} + \hat{\sigma}_{A}^{-} \hat{\sigma}_{B}^{+} \right) + k_{B} \left( \hat{\sigma}_{B}^{+} \hat{\sigma}_{C}^{-} + \hat{\sigma}_{B}^{-} \hat{\sigma}_{C}^{+} \right) \\ &+ k_{C} \left( \hat{\sigma}_{A}^{+} \hat{\sigma}_{C}^{-} + \hat{\sigma}_{A}^{-} \hat{\sigma}_{C}^{+} \right). \end{aligned}$$

با این هامیلتونی، دستیابی به شکل صریح بردار حالت سامانه بعد از برهم کنش امکان پذیر نشد. بنابراین، برای حل مشکل، به محاسبه هامیلتونی مؤثر با کمک هامیلتونی (۱) و مطابق رهیافت مطرح شده در مرجع [۷] می پردازیم. برای محاسبه هامیلتونی مؤثر در ابتدا باید هامیلتونی (۱) در تصویر برهم کنش به دست آید. با استفاده از لم بیکر-هاسدورف، هامیلتونی (۱) در تصویر برهم کنش به شکل زیر به دست می آید:  $\hat{H}_{int}(t) = \int_{a}^{b} g_k \hat{a}_k^{+} e^{it(\omega_k - v)} + g_k \hat{a}^{\dagger} g_k^{-} e^{-it(\omega_k - v)}.$ 

 $H_{\text{int}}(t) = \sum_{k=A,B,C} g_k d\sigma_k^{e} + g_k d\sigma$ 

هامیلتونی مؤثر متناظر از رابطه زیر قابل محاسبه است:

 $\rho_{AB}(t) = \left\langle e_{C} \left| \rho_{ABC}(t) \right| e_{C} \right\rangle + \left\langle g_{C} \left| \rho_{ABC}(t) \right| g_{C} \right\rangle, \tag{11}$ 

$$\rho_{AC}(t) = \langle e_B | \rho_{ABC}(t) | e_B \rangle + \langle g_B | \rho_{ABC}(t) | g_B \rangle.$$
(11)

به منظور محاسبه درهم تنیدگی بین دو اتم دوترازی با توجه به تعریف تلاقی به صورت زیر [۵]:  $C(t) = Mar \{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\},$ (۱۴) که در آن  $\lambda_i$  (1,2,3,4)، ویژه مقادیر به ترتیب نزولی

$$\begin{split} \hat{\sigma}_{y} & (R - (C_{AB})^{R}) = (\hat{\sigma}_{y} \otimes \hat{\sigma}_{y}) \cdot \hat{\rho}^{*} \cdot (\hat{\sigma}_{y} \otimes \hat{\sigma}_{y}) = R \quad \text{lum:} \quad (e_{C} \otimes \hat{\sigma}_{y}) = R \quad (e_{C} \otimes \hat{\sigma}_{y}) = R$$

که در این رابطه ( $\lambda_2^{AC}, \lambda_1^{AC}$ ) و ( $\lambda_2^{AC}, \lambda_1^{AC}$ ) به ترتیب ویژهمقادیر غیرصفر ماتریسهای چگالی کاهش یافته ( $\lambda_{AC}(t)$  و (۱۲) مشخص ((۱۲) و (۱۳) مشخص شدهاند. همچنین، به کمک روابط تلاقی در (۱۵) و با استفاده از رابطه زیر [۵]:

$$C_{A(BC)}(t) = \sqrt{C_{AB}^{2}(t) + C_{AC}^{2}(t) + 2(\sqrt{\lambda_{1}^{AB} \lambda_{2}^{AB}} - \sqrt{\lambda_{1}^{AC} \lambda_{2}^{AC}})}, \quad (18)$$

میتوان درهمتنیدگی بین اتم A با مجموعه (B, C) را نیز به دست آورد.

## تجزیه و تحلیل عددی نتایج

در شکل ۱، تاثیر شرایط اولیه (با تغییر  $\alpha$  در رابطه (۳)) بر درهمتنیدگی جفتهای (A, B) و (A, C) مطابق رابطه (۱۵) بررسی می شود. در رابطه (۱۵)، تلاقی ( $C_{AB}(t)$  برابر با  $C_{AC}(t)$  است. در این شکل، تمام نمودارها با نمودار نقطه خط سبزرنگ مقایسه می شوند.



شکل ۱: نمودار تغییرات درهمتنیدگی جفتهای (A, B) و (A, C) طبق  $\alpha = \pi/4$ ،  $\omega = g$  رابطه (۱۵) بر حسب زمان مقیاس بندی شده gt برای gt مرای (۱۵) بر (نقطهخط سبز)،  $\alpha = \pi/6$  (خطچین مشکی)،  $\alpha = \pi/12$  (نقطهچین قرمز)،  $\alpha = 0$  (خط پیوسته آبی).

$$\hat{H}_{eff}(t) = \hat{H}_0 + \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{\hbar\omega_{nm}} [\hat{h}_m^{\dagger}, \hat{h}_n] \exp(i(\omega_m - \omega_n)t), \qquad (\texttt{Y})$$

که در آن  $\frac{1}{\omega_m} = \left(\frac{1}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_m}\right) \frac{1}{2}$  است. با طی کردن مسیر بیان شده در مرجع [۷]، برای محاسبه هامیلتونی مؤثر مرتبط با مقاله حاضر و با اعمال شرایط قابل دستیابی مرتبط با مقاله حاضر و با اعمال شرایط قابل دستیابی با مدل برهم کنشی که ما در نظر گرفتیم، در شرایط تشدید

$$\begin{split} \hat{H}_{eff} &= -\frac{g^2}{\omega} \left[ \hat{a}^{\dagger} \hat{a} (\hat{\sigma}_A^Z + \hat{\sigma}_B^Z + \hat{\sigma}_C^Z) \right. \\ &+ \hat{\sigma}_A^+ \hat{\sigma}_A^- + \hat{\sigma}_B^+ \hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_C^+ \hat{\sigma}_C^- + \hat{\sigma}_A^+ \hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_B^+ \hat{\sigma}_A^- \\ &+ \hat{\sigma}_B^+ \hat{\sigma}_C^- + \hat{\sigma}_C^+ \hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_C^+ \hat{\sigma}_A^- + \hat{\sigma}_A^+ \hat{\sigma}_C^- \right]. \end{split}$$

به صورت زیر به دست می آید:  $(\omega = v)$ 

با در نظر گرفتن حالت خلاء برای میدان اولیه، سه جمله شامل ( $\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ ) از هامیلتونی مؤثر ( $\Lambda$ ) حذف می شود. با استفاده از هامیلتونی به دست آمده بعد از حذف جملات میدان و با توجه به حالت اولیه ( $\pi$ )، حالت در هم تنیده مربوط به سه اتم بعد از برهم کنش، به کمک معادله وابسته به زمان شرودینگر  $\hat{c}_{t} = \hat{H}_{eff} | \phi(t) \rangle_{ABC}$  به شکل زیر حاصل می شود:

$$\phi(t)\rangle_{ABC} = (C_1(t)|egg\rangle + C_2(t)|gge\rangle + C_3(t)|geg\rangle$$

$$+C_4(t)|ege\rangle + C_5(t)|eeg\rangle + C_6(t)|gee\rangle)_{ABC},$$
(9)

که در آن ضرایب بالا پس از حل معادله شرودینگر به صورت زیر به دست میآید:

$$\begin{split} C_1(t) &= \frac{1}{3} \left[ 2 + \exp(\frac{3ig^2 t}{\omega}) \right] \cos \alpha, \\ C_2(t) &= C_3(t) = \frac{1}{3} \left[ -1 + \exp(\frac{3ig^2 t}{\omega}) \right] \cos \alpha, \\ C_4(t) &= C_5(t) = \frac{1}{3} \exp(\frac{ig^2 t}{\omega}) \left[ -1 + \exp(\frac{3ig^2 t}{\omega}) \right] \sin \alpha, \\ C_6(t) &= \frac{1}{3} \exp(\frac{ig^2 t}{\omega}) \left[ 2 + \exp(\frac{3ig^2 t}{\omega}) \right] \sin \alpha. \end{split}$$

حال به منظور محاسبه درهمتنیدگی با استفاده از سنجه تلاقی، ماتریس چگالی حالت (۹) به صورت زیر به دست میآید:

$$\rho_{ABC}(t) = \left|\phi(t)\right\rangle_{ABC} \left\langle\phi(t)\right|. \tag{11}$$

(A, B) برای محاسبه درهمتنیدگی بین اتمهای (A, B) و
 (A) ماتریس چگالی کاهش یافته مربوط به جفتهای اتمی
 (C) ماتریس به صورت زیر محاسبه می شوند:

بلافاصله بعد از آن احیای درهمتنیدگی مشاهده میشود. نمودار برای دو مقدار ذکر شده بر هم منطبق است. در نمودارهای شکل ۱ و ۲ رفتار تلاقی نوسانی است.

## نتيجهگيرى

در این مقاله، تاثیر برهم کنش دوقطبی - دوقطبی بر درهم تنیدگی در یک سامانه برهم کنشی اتم - میدان مورد مطالعه قرار گرفت. در ابتدا، سه اتم در حال برهم کنش با میدان تک مد کوانتومی در یک کاواک مشتر ک در حضور سرهم کنش دوقطبی - دوقطبی در نظر گرفته شد. در نهایت، سنجه تلاقی به منظور محاسبه درهم تنیدگی بین جفتهای اتمی و هم چنین درهم تنیدگی بین یک اتم با دو اتم دیگر مورد بررسی قرار گرفت. تاثیر تغییر شرایط اولیه بر تلاقیها مورد مطالعه قرار گرفت و مشاهده شد که در شرایطی، ایشینه مقدار درهم تنیدگی قابل حصول است. هم چنین، با انتخاب حالت اولیه جداپذیر برای سه اتم، بعد از ایجاد برهم کنش بین اتمها و محاسبه تلاقی، مقادیر قابل قبولی برای درهم تنیدگی به دست آمد که در بسیاری از موارد، بویژه در مورد تلاقی جفتهای اتمی، شاهد مرگ لحظهای درهم تنیدگی و سپس احیای آن بودیم.

#### مرجعها

[1] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, "Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels", Phys. Rev. Lett., Vol. 70, No. 13, p. 1895, 1993.

[2] X. B. Zou, K. Pahlke, W. Mathis, "Generation of entangled states of two three-level atoms in cavity QED", Phys. Rev. A, Vol. 67, No. 4, p. 044301, 2003.

[3] C. N. Gagatsos, O. Oreshkov, N. J. Cerf, "Majorization relations and entanglement generation in a beam splitter", Phys. Rev. A, Vol. 87, No. 4, p. 042307, 2013.

[4] Ch. Gerry, Peter L. Knight, *Introductory quantum optics*, Cambridge university press, 2005.

[5] V. Coffman, J. Kundu, W. K. Wootters, "Distributed entanglement", Phys. Rev. A, Vol. 61, No. 5, p. 052306, 2000.

[6] M. Tavis, F. W. Cummings, "Exact solution for an N-molecule-radiation-field Hamiltonian", Phys. Rev., Vol. 170, No. 2, p. 379, 1968.

[7] D. F. James, J. Jerke, "Effective Hamiltonian Theory and Its Applications in Quantum Information", Can. J. Phys., Vol. 85, No. 6, pp. 625-632, 2007. در نمودار خطچین مشکی با انتخاب شرط اولیه اتمی  $\alpha = \pi/6$  در مقایسه با نمودار نقطهخط سبزرنگ مقدار درهم تنیدگی افزایش یافته است. در نمودار نقطهچین قرمز با انتخاب 2/  $\alpha = \pi/12$  میزان درهم تنیدگی در مقایسه با دو نمودار قبلی افزایش یافته است. همچنین، نمودار پیوسته آبیرنگ مربوط به  $0 = \alpha = \pi/2$  است (نمودار برای آبیرنگ مربوط به  $0 = \alpha = \pi/2$  است (نمودار برای این دو مقدار بر هم منطبق است) یعنی با توجه به رابطه این دو مقدار برای شرایطی رسم شده که حالت اولیه اتمها جداپذیر است. این نمودار، تولید درهم تنیدگی را به واسطه برهم کنش نشان می دهد که میزان درهم تنیدگی در مقایسه با نمودار با نمودار با می دودار با می دودار با می منطبق است) یعنی با توجه می را به واسطه این مودار با می دودار می میزان درهم تنیدگی در مقایسه با مودار با نمودار، تولید درهم تنیدگی در مقایسه با موها با نمودارهای قبلی افزایش یافته است.



شکل ۲: نمودار تغییرات درهمتنیدگی بین اتم A با مجموعه (B, C) طبق (D, C) با محموعه (B, C) طبق رابطه (۱۶) بر حسب زمان مقیاس بندی شده gt برای g = g . نمودار بالا:  $\alpha = \pi/4$  (خط پیوسته سبز)،  $\alpha = \pi/6$  (خط چین مشکی). نمودار پایین:

 $\pi/12$  (نقطهچین قرمز)،  $2/\pi = \alpha$  و  $0 = \alpha$  (خط پیوسته آبی). در شکل ۲ (بالا و پایین) تاثیر حالت اولیه (۳) بر درهم تنیدگی بین اتم A با مجموعه (B, C) مطابق رابطه (۱۶) مورد بررسی قرار می گیرد. در شکل ۲ (بالا)، درهم تنیدگی در نمودار پیوسته سبزرنگ با انتخاب  $\alpha = \pi/4$  می مقدار رسیده، در میدان مقدار رسیده، اما در نمودار خطچین مشکی با انتخاب  $\delta/\pi = \alpha$  فروافتی اما در نمودار خطچین مشکی با انتخاب  $\delta/\pi = \alpha$  فروافتی نمودار نقطهچین قرمز مشاهده می شود که با انتخاب نمودار نقطه وین قرمز مشاهده می شود که با انتخاب ملاحظه ای در مقایسه با نمودار خطچین مشکی (در شکل ۲) افزایش یافته است. در نمودار پیوسته آبی، با انتخاب ملاحظه ای در مقایسه با نمودار خطچین مشکی (در شکل ۲) افزایش یافته است. در نمودار پیوسته آبی، با انتخاب مراح مینه تلاقی به صفر رسیده (مرگ درهم تنیدگی) اما