



بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران، دانشگاه شهید چمران اهواز، خوزستان، ایران.  
۱۴-۱۲ بهمن ۱۴۰۰



## اثر برهم کنش دوقطبی - دوقطبی بر دینامیک درهم تنیدگی در یک سامانه سه اتمی

شهربانو اکبری، محمد کاظم توسلی، مهناز قاسمی

گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

[shakbari9574@gmail.com](mailto:shakbari9574@gmail.com), [mktavassoly@yazd.ac.ir](mailto:mktavassoly@yazd.ac.ir), [m.ghasemi@stu.yazd.ac.ir](mailto:m.ghasemi@stu.yazd.ac.ir)

چکیده- در این مقاله، درهم تنیدگی تولید شده به واسطه برقراری برهم کنش اتم- میدان در یک کاواک تک مد را مورد بررسی قرار می دهیم. سه اتم دوترازی (مدل تاویز- کامینگز) در یک کاواک تک مد در حال برهم کنش با میدان هستند. با در نظر گرفتن برهم کنش دوقطبی- دوقطبی بین هر جفت اتم، تحول سامانه مورد مطالعه قرار می گیرد. در نهایت، درهم تنیدگی جفت های اتمی و نیز درهم تنیدگی یک اتم با دو اتم دیگر با سنجح تلافی محاسبه می شود. نتایج نشان می دهد که با تنظیم پارامترها می توان به بیشینه مقدار درهم تنیدگی دست یافت. همچنین، مقادیر درهم تنیدگی ایجاد شده بعد از برهم کنش، حتی با انتخاب حالت اولیه جداپذیر برای اتمها، قابل قبول است.

کلید واژه- برهم کنش اتم- میدان، تلافی، درهم تنیدگی، مدل تاویز- کامینگز.

## The influence of dipole-dipole interaction on the entanglement dynamics in a three-atom system

Shahrbanoo Akbari, Mohammad Kazem Tavassoly, Mahnaz Ghasemi

Optics and Laser Group, Faculty of Physics, Yazd University

**Abstract-** In this paper, we investigate the produced entanglement by performing atom-field interaction in a single-mode cavity. Three two-level atoms (Tavis-Cummings model) are interacting with the field in a single-mode cavity. By considering dipole-dipole interaction between each pair of atoms, evolution of the system is studied. Finally, the entanglement of atomic pairs as well as the entanglement of one atom with the other two atoms are calculated via concurrence measure. The results show that the maximum of entanglement is achieved with appropriate choices of the involved parameters. Also, the amounts of produced entanglement after the interaction are acceptable even with selecting the separable initial state for atoms.

Keywords: Atom-field interaction, Concurrence, Entanglement, Tavis-Cummings model.

## مقدمه

به دلیل اهمیت درهم‌تنیدگی در پردازش اطلاعات کوانتومی، محاسبات کوانتومی و هم‌چنین نقش کلیدی آن در فناوری‌های کوانتومی [۱]، مطالعه و بررسی این پدیده بسیار مورد توجه است. درهم‌تنیدگی بین اجزاء یک سامانه می‌تواند با ایجاد برهم‌کنش بین اجزای آن برقرار شود [۲]. هم‌چنین، این ویژگی با استفاده از شکافنده پرتو نیز قابل تولید است [۳]. در حقیقت، وجود درهم‌تنیدگی بین زیرسامانه‌های یک سامانه منجر به جداناپذیری حالت‌های زیرسامانه‌ها از یکدیگر می‌شود. مدل جینز-کامینگز یکی از مدل‌های معتبر برای توصیف برهم‌کنش اتم با میدان کوانتومی است [۴]. این مدل قابل‌گسترش است و می‌تواند با افزایش تعداد اتم‌ها (مدل تاویز-کامینگز) و در نظر گرفتن برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی بین اتم‌ها، تحولات سامانه را مورد مطالعه و بررسی قرار داد. وجود برهم‌کنش توصیف شده با مدل جینز-کامینگز یا تاویز-کامینگز منجر به ایجاد درهم‌تنیدگی می‌شود که می‌توان آن را با سنج تلاقی مورد بررسی قرار داد [۵].

## مدل سامانه و روابط پایه

سامانه مورد مطالعه متشکل از سه اتم دوترازی A، B و C است که این سه اتم با یک میدان تک‌مد کوانتومی در یک کاواک در حال برهم‌کنش هستند. گاهی این مدل به مدل تاویز-کامینگز شناخته می‌شود [۶]. این برهم‌کنش با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{H} = v\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_{k=A,B,C} \left[ \frac{\omega_k}{2} \hat{\sigma}_k^z + g_k (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_k^- + \hat{a} \hat{\sigma}_k^+) \right], \quad (1)$$

که مجموع دو جمله اول هامیلتونی (۱) به عنوان بخش غیربرهم‌کنشی هامیلتونی،  $\hat{H}_0$  نام دارد که جملات اول و دوم آن به ترتیب هامیلتونی‌های آزاد میدان و اتم است. جمله آخر نیز به واسطه برهم‌کنش اتم-میدان وارد شده است که بخش برهم‌کنشی هامیلتونی است ( $\hat{H}_1$ ). در هامیلتونی (۱)،  $V$  و  $\omega_k$  به ترتیب نشان دهنده بسامد

میدان تک‌مد و بسامد گذار اتمی اتم  $k$ -ام است. هم‌چنین، ثابت جفت‌شدگی اتم-میدان بین اتم  $k$ -ام و میدان را مشخص می‌کند.  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  (عملگر آفرینش (نابودی) میدان و عملگرهای  $\sigma_k^+$ ،  $\sigma_k^-$  و  $\sigma_k^z$  به ترتیب عملگرهای پایین آورنده، بالا برنده و وارونی جمعیت اتمی اتم  $k$ -ام هستند که به ترتیب به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{\sigma}_k^- = |g\rangle_k \langle e|, \quad \hat{\sigma}_k^+ = |e\rangle_k \langle g|, \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}_k^z = |e\rangle_k \langle e| - |g\rangle_k \langle g|,$$

در اینجا حالت‌های  $|e\rangle_k$  و  $|g\rangle_k$  به ترتیب نشان دهنده تراز برانگیخته و پایه اتم  $k$ -ام است. حالت اولیه اتم‌ها به صورت کلی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$|\phi\rangle_{ABC} = (\cos\alpha |egg\rangle + \sin\alpha |gee\rangle)_{ABC}. \quad (3)$$

هم‌چنین، حالت اولیه میدان نیز خلاء است. با اضافه کردن جملات مربوط به برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی با ثابت‌های جفت‌شدگی  $k_A, k_B, k_C$  به هامیلتونی (۱) داریم:

$$\begin{aligned} \hat{H}' = & v\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_{k=A,B,C} \left[ \frac{\omega_k}{2} \hat{\sigma}_k^z + g_k (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_k^- + \hat{a} \hat{\sigma}_k^+) \right] \\ & + k_A (\hat{\sigma}_A^+ \hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_A^- \hat{\sigma}_B^+) + k_B (\hat{\sigma}_B^+ \hat{\sigma}_C^- + \hat{\sigma}_B^- \hat{\sigma}_C^+) \\ & + k_C (\hat{\sigma}_A^+ \hat{\sigma}_C^- + \hat{\sigma}_A^- \hat{\sigma}_C^+). \end{aligned} \quad (4)$$

با این هامیلتونی، دستیابی به شکل صریح بردار حالت سامانه بعد از برهم‌کنش امکان‌پذیر نشد. بنابراین، برای حل مشکل، به محاسبه هامیلتونی مؤثر با کمک هامیلتونی (۱) و مطابق رهیافت مطرح شده در مرجع [۷] می‌پردازیم. برای محاسبه هامیلتونی مؤثر در ابتدا باید هامیلتونی (۱) در تصویر برهم‌کنش به دست آید. با استفاده از لم بیکر-هاسدورف، هامیلتونی (۱) در تصویر برهم‌کنش به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \sum_{k=A,B,C} g_k \hat{a} \hat{\sigma}_k^+ e^{i\omega_k t} + g_k \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_k^- e^{-i\omega_k t}. \quad (5)$$

مطابق با رهیافت مرجع [۷]، برای هامیلتونی به شکل زیر:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \sum_{n=1}^N \hat{h}_n \exp(-i\omega_n t) + \hat{h}_n^\dagger \exp(i\omega_n t), \quad (6)$$

هامیلتونی مؤثر متناظر از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\rho_{AB}(t) = \langle e_C | \rho_{ABC}(t) | e_C \rangle + \langle g_C | \rho_{ABC}(t) | g_C \rangle, \quad (12)$$

$$\rho_{AC}(t) = \langle e_B | \rho_{ABC}(t) | e_B \rangle + \langle g_B | \rho_{ABC}(t) | g_B \rangle. \quad (13)$$

به منظور محاسبه درهم تنیدگی بین دو اتم دوترازی با توجه به تعریف تلاقی به صورت زیر [۵]:

$$C(t) = \text{Max}\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}, \quad (14)$$

که در آن  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3,4$ )، ویژه مقادیر به ترتیب نزولی ماتریس چگالی  $R = (\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) \cdot \rho^* \cdot (\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)$  است (در  $\hat{\sigma}_y$ ، ماتریس پائولی و  $\rho^*$  همیوگ مختلط ماتریس چگالی اتمی است)، تلاقی مربوط به جفت های (A, B) و (A, C) به صورت زیر به دست می آید:

$$C_{AB}(t) = \text{Max}\{0, \sqrt{\lambda_1^{AB}} - \sqrt{\lambda_2^{AB}}\}, \quad (15)$$

$$C_{AC}(t) = \text{Max}\{0, \sqrt{\lambda_1^{AC}} - \sqrt{\lambda_2^{AC}}\},$$

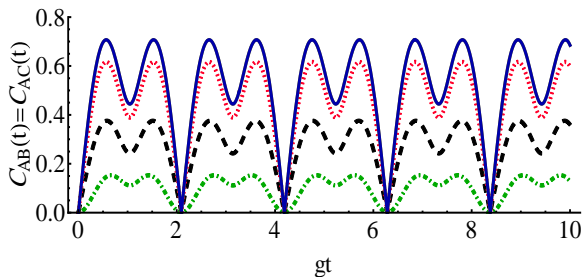
که در این رابطه  $(\lambda_2^{AB}, \lambda_1^{AB})$  و  $(\lambda_2^{AC}, \lambda_1^{AC})$  به ترتیب ویژه مقادیر غیر صفر ماتریس های چگالی کاهش یافته  $\rho_{AB}(t)$  و  $\rho_{AC}(t)$  است که در روابط (۱۲) و (۱۳) مشخص شده اند. هم چنین، به کمک روابط تلاقی در (۱۵) و با استفاده از رابطه زیر [۵]:

$$C_{A(BC)}(t) = \sqrt{C_{AB}^2(t) + C_{AC}^2(t) + 2(\sqrt{\lambda_1^{AB} \lambda_2^{AB}} - \sqrt{\lambda_1^{AC} \lambda_2^{AC}})}, \quad (16)$$

می توان درهم تنیدگی بین اتم A با مجموعه (B, C) را نیز به دست آورد.

### تجزیه و تحلیل عددی نتایج

در شکل ۱، تاثیر شرایط اولیه (با تغییر  $\alpha$  در رابطه (۳)) بر درهم تنیدگی جفت های (A, B) و (A, C) مطابق رابطه (۱۵) بررسی می شود. در رابطه (۱۵)، تلاقی  $C_{AB}(t)$  برابر با  $C_{AC}(t)$  است. در این شکل، تمام نمودارها با نمودار نقطه خط سبز رنگ مقایسه می شوند.



شکل ۱: نمودار تغییرات درهم تنیدگی جفت های (A, B) و (A, C) طبق رابطه (۱۵) بر حسب زمان مقیاس بندی شده  $gt$  برای  $\alpha = \pi/4$ ،  $\omega = g$  (نقطه خط سبز)،  $\alpha = \pi/6$  (خط چین مشکی)،  $\alpha = \pi/12$  (نقطه چین قرمز)، و  $\alpha = 0$  (خط پیوسته آبی).

$$\hat{H}_{eff}(t) = \hat{H}_0 + \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{\hbar \omega_{nm}} [\hat{h}_m^\dagger, \hat{h}_n] \exp(i(\omega_m - \omega_n)t), \quad (7)$$

که در آن  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_m} \right) = \frac{1}{\omega_{nm}}$  است. با طی کردن مسیر بیان شده در مرجع [۷]، برای محاسبه هامیلتونی مؤثر مرتبط با مقاله حاضر و با اعمال شرایط قابل دستیابی نهایتاً هامیلتونی مؤثر متناظر با مدل برهم کنشی که ما در نظر گرفتیم، در شرایط تشدید ( $\omega = \nu$ ) به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} = & -\frac{g^2}{\omega} [\hat{a}^\dagger (\hat{\sigma}_A^Z + \hat{\sigma}_B^Z + \hat{\sigma}_C^Z) \\ & + \hat{\sigma}_A^+ \hat{\sigma}_A^- + \hat{\sigma}_B^+ \hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_C^+ \hat{\sigma}_C^- + \hat{\sigma}_A^+ \hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_B^+ \hat{\sigma}_A^- \\ & + \hat{\sigma}_B^+ \hat{\sigma}_C^- + \hat{\sigma}_C^+ \hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_C^+ \hat{\sigma}_A^- + \hat{\sigma}_A^+ \hat{\sigma}_C^-]. \end{aligned} \quad (8)$$

با در نظر گرفتن حالت خلاء برای میدان اولیه، سه جمله شامل  $(\hat{a}^\dagger \hat{a})$  از هامیلتونی مؤثر (۸) حذف می شود. با استفاده از هامیلتونی به دست آمده بعد از حذف جملات میدان و با توجه به حالت اولیه (۳)، حالت درهم تنیده مربوط به سه اتم بعد از برهم کنش، به کمک معادله وابسته به زمان شرودینگر  $\left( i \frac{\partial |\phi(t)\rangle_{ABC}}{\partial t} = \hat{H}_{eff} |\phi(t)\rangle_{ABC} \right)$  به شکل زیر حاصل می شود:

$$|\phi(t)\rangle_{ABC} = (C_1(t)|egg\rangle + C_2(t)|gge\rangle + C_3(t)|geg\rangle + C_4(t)|ege\rangle + C_5(t)|eeg\rangle + C_6(t)|gee\rangle)_{ABC}, \quad (9)$$

که در آن ضرایب بالا پس از حل معادله شرودینگر به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{1}{3} [2 + \exp(\frac{3ig^2 t}{\omega})] \cos \alpha, \\ C_2(t) = C_3(t) &= \frac{1}{3} [-1 + \exp(\frac{3ig^2 t}{\omega})] \cos \alpha, \\ C_4(t) = C_5(t) &= \frac{1}{3} \exp(\frac{ig^2 t}{\omega}) [-1 + \exp(\frac{3ig^2 t}{\omega})] \sin \alpha, \\ C_6(t) &= \frac{1}{3} \exp(\frac{ig^2 t}{\omega}) [2 + \exp(\frac{3ig^2 t}{\omega})] \sin \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

حال به منظور محاسبه درهم تنیدگی با استفاده از سنجه تلاقی، ماتریس چگالی حالت (۹) به صورت زیر به دست می آید:

$$\rho_{ABC}(t) = |\phi(t)\rangle_{ABC} \langle \phi(t)|. \quad (11)$$

برای محاسبه درهم تنیدگی بین اتم های (A, B) و (A, C) ماتریس چگالی کاهش یافته مربوط به جفت های اتمی بیان شده به ترتیب به صورت زیر محاسبه می شوند:

بلافاصله بعد از آن احیای درهم‌تنیدگی مشاهده می‌شود. نمودار برای دو مقدار ذکر شده بر هم منطبق است. در نمودارهای شکل ۱ و ۲ رفتار تلاقی نوسانی است.

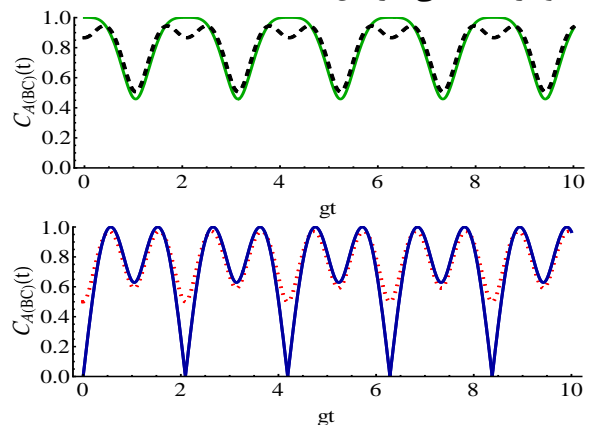
### نتیجه‌گیری

در این مقاله، تاثیر برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی بر درهم‌تنیدگی در یک سامانه برهم‌کنشی اتم-میدان مورد مطالعه قرار گرفت. در ابتدا، سه اتم در حال برهم‌کنش با میدان تک‌مد کوانتومی در یک کاواک مشترک در حضور برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی در نظر گرفته شد. در نهایت، سنجح تلاقی به منظور محاسبه درهم‌تنیدگی بین جفت‌های اتمی و همچنین درهم‌تنیدگی بین یک اتم با دو اتم دیگر مورد بررسی قرار گرفت. تاثیر تغییر شرایط اولیه بر تلاقی‌ها مورد مطالعه قرار گرفت و مشاهده شد که در شرایطی، بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی قابل حصول است. هم‌چنین، با انتخاب حالت اولیه جداپذیر برای سه اتم، بعد از ایجاد برهم‌کنش بین اتم‌ها و محاسبه تلاقی، مقادیر قابل قبولی برای درهم‌تنیدگی به دست آمد که در بسیاری از موارد، بویژه در مورد تلاقی جفت‌های اتمی، شاهد مرگ لحظه‌ای درهم‌تنیدگی و سپس احیای آن بودیم.

### مرجع‌ها

- [1] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, "Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels", Phys. Rev. Lett., Vol. 70, No. 13, p. 1895, 1993.
- [2] X. B. Zou, K. Pahlke, W. Mathis, "Generation of entangled states of two three-level atoms in cavity QED", Phys. Rev. A, Vol. 67, No. 4, p. 044301, 2003.
- [3] C. N. Gagatsos, O. Oreshkov, N. J. Cerf, "Majorization relations and entanglement generation in a beam splitter", Phys. Rev. A, Vol. 87, No. 4, p. 042307, 2013.
- [4] Ch. Gerry, Peter L. Knight, *Introductory quantum optics*, Cambridge university press, 2005.
- [5] V. Coffman, J. Kundu, W. K. Wootters, "Distributed entanglement", Phys. Rev. A, Vol. 61, No. 5, p. 052306, 2000.
- [6] M. Tavis, F. W. Cummings, "Exact solution for an N-molecule-radiation-field Hamiltonian", Phys. Rev., Vol. 170, No. 2, p. 379, 1968.
- [7] D. F. James, J. Jerke, "Effective Hamiltonian Theory and Its Applications in Quantum Information", Can. J. Phys., Vol. 85, No. 6, pp. 625-632, 2007.

در نمودار خط‌چین مشکی با انتخاب شرط اولیه اتمی در مقایسه با نمودار نقطه‌خط سبزرنگ مقدار درهم‌تنیدگی افزایش یافته است. در نمودار نقطه‌چین قرمز با انتخاب  $\alpha = \pi/12$  میزان درهم‌تنیدگی در مقایسه با دو نمودار قبلی افزایش یافته است. هم‌چنین، نمودار پیوسته آبی‌رنگ مربوط به  $\alpha = 0$  و  $\alpha = \pi/2$  است (نمودار برای این دو مقدار بر هم منطبق است) یعنی با توجه به رابطه (۳) نمودار برای شرایطی رسم شده که حالت اولیه اتم‌ها جداپذیر است. این نمودار، تولید درهم‌تنیدگی را به واسطه برهم‌کنش نشان می‌دهد که میزان درهم‌تنیدگی در مقایسه با نمودارهای قبلی افزایش یافته است.



شکل ۲: نمودار تغییرات درهم‌تنیدگی بین اتم A با مجموعه (B, C) طبق رابطه (۱۶) بر حسب زمان مقیاس‌بندی شده  $gt$  برای  $\omega = g$ . نمودار بالا:  $\alpha = \pi/4$  (خط پیوسته سبز)،  $\alpha = \pi/6$  (خط‌چین مشکی). نمودار پایین:  $\alpha = \pi/12$  (نقطه‌چین قرمز)،  $\alpha = \pi/2$  و  $\alpha = 0$  (خط پیوسته آبی). در شکل ۲ (بالا و پایین) تاثیر حالت اولیه (۳) بر درهم‌تنیدگی بین اتم A با مجموعه (B, C) مطابق رابطه (۱۶) مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۲ (بالا)، درهم‌تنیدگی در نمودار پیوسته سبزرنگ با انتخاب  $\alpha = \pi/4$  در بازه‌هایی از زمان به بیشترین مقدار رسیده، اما در نمودار خط‌چین مشکی با انتخاب  $\alpha = \pi/6$  فروافتی در این بازه‌های زمانی رخ داده است. در شکل ۲ (پایین)، از نمودار نقطه‌چین قرمز مشاهده می‌شود که با انتخاب  $\alpha = \pi/12$  فروافت درهم‌تنیدگی به میزان قابل ملاحظه‌ای در مقایسه با نمودار خط‌چین مشکی (در شکل ۲) افزایش یافته است. در نمودار پیوسته آبی، با انتخاب  $\alpha = 0$  و  $\alpha = \pi/2$  (با انتخاب حالت اولیه جداپذیر برای اتم‌ها) کمینه تلاقی به صفر رسیده (مرگ درهم‌تنیدگی) اما