



بیست و پنجمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و یازدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شیراز،
شیراز، ایران.
۱۱-۹ بهمن ۱۳۹۷



بهره‌گیری از سامانه‌های اپتومکانیکی در طرح‌واره‌های تکرارگر کوانتومی

مهناز قاسمی و محمد کاظم توسلی

گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

mktavassoly@yazd.ac.ir

m.ghasemi@stu.yazd.ac.ir

چکیده - در این مقاله به ایجاد درهم‌تنیدگی بین دو اتم سه‌ترازی دور از هم به منظور فراهم کردن یک تکرارگر کوانتومی می‌پردازیم. در این پروتکل، فاصله بین دو اتم هدف را با وارد کردن سه گره کوانتومی (قرار دادن شش اتم) بین آن‌ها به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم. اتم‌ها با اعداد (۱، ۲، ...، ۸) نام‌گذاری شده‌اند و جفت‌های (۱، ۲)، (۳، ۴)، (۵، ۶) و (۷، ۸) در حالت‌های درهم‌تنیده آماده‌سازی شده‌اند. ابتدا، با فراهم کردن برهم‌کنش بین اتم‌های (۲، ۳) و (۶، ۷) در حضور سامانه‌های اپتومکانیکی، درهم‌تنیدگی بین اتم‌های (۱، ۴) و (۵، ۸) ایجاد می‌شود. سپس، با فراهم سازی برهم‌کنش بین اتم‌های (۴، ۵) در یک کاواک اپتیکی به حالت‌های درهم‌تنیده بین اتم‌های (۱، ۸) دست می‌یابیم. درهم‌تنیدگی با سنج آنتروپی بررسی می‌شود. میزان شدت جفت‌شدگی مد اپتومکانیکی با مد میدان، تأثیری بر آنتروپی اتم‌های (۱، ۸) ندارد، اما افزایش آن موجب کاهش دوره تناوب آنتروپی اتم‌های (۴، ۵) و (۸، ۱) می‌شود. افزایش بسامد مد اپتومکانیکی در تمامی مراحل فرآیند موجب افزایش دوره تناوب درهم‌تنیدگی بین اتم‌های (۴، ۵)، (۸، ۱) و (۸، ۴) می‌شود.

کلیدواژه - تبادل درهم‌تنیدگی، تکرارگر کوانتومی، سامانه‌های اپتومکانیکی، مدل تاویز- کامینگز.

Using the optomechanical systems in the quantum repeater schemes

Mahnaz Ghasemi and Mohammad Kazem Tavassoly

Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

Abstract- In this paper, we produce entanglement between two distant three-level atoms in order to prepare a quantum repeater. In this protocol, the distance between two target atoms is divided to four parts by inserting three quantum nodes (inserting six atoms) between them. The atoms have been labeled by (1, 2, ... 8) and the pairs (1, 2), (3, 4), (5, 6) and (7, 8) have been prepared in entangled states. At first, by performing interaction between atoms (2, 3) and (6, 7) in the presence of optomechanical systems, entanglement is generated between atoms (1, 4) and (5, 8). Finally, we achieve the entangled states between atoms (1, 8) by performing interaction between atoms (4, 5) in an optical cavity. The entanglement is evaluated via entropy. The optomechanical coupling strength to the field mode has no effect on entropy of atoms (1, 8), but the time periods of entropy of atoms (1, 4) and (5, 8) are decreased by increasing this coupling strength. Increasing the frequency of optomechanical mode leads to an increase in the time periods of entanglement between atoms (1, 4), (5, 8) and (1, 8) in all stages of the process.

Keywords: Entanglement Swapping, Quantum Repeater, Optomechanical Systems, Tavis-Cummings Model.

پروتکل تکرارگر کوانتومی استفاده می‌شود [۱]. در این روش، فاصله بین مبدا و مقصد به بخش‌های کوچک تقسیم می‌شود و با استفاده از روش‌های تبادل درهم‌تنیدگی، این

مقدمه: در انتقال حالت‌های درهم‌تنیده به مسافت‌های طولانی، به منظور جلوگیری از تضعیف درهم‌تنیدگی از

$$\begin{aligned} \hat{H}_{(2,3)} = & \sum_{i=1}^3 \tilde{\omega}_i \hat{\sigma}_{ii}^2 + \sum_{i=1}^3 \tilde{\omega}'_i \hat{\sigma}_{ii}^3 + \sum_{i=1}^2 \Omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \\ & + \sum_{j=1}^2 \omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \lambda_1 (\hat{a}_1 \hat{\sigma}_{13}^2 + h.c.) \\ & + \lambda_2 (\hat{a}_2 \hat{\sigma}_{23}^2 + h.c.) + \lambda'_1 (\hat{a}_1 \hat{\sigma}_{13}^3 + h.c.) \\ & + \lambda'_2 (\hat{a}_2 \hat{\sigma}_{23}^3 + h.c.) - G \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 (\hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger) \\ & - G' \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 (\hat{b}_2 + \hat{b}_2^\dagger). \end{aligned} \quad (2)$$

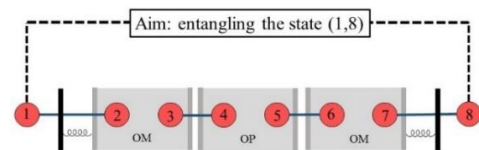
در هامیلتونی (۲) λ'_i, G, G' ثابت‌های جفت‌شدگی بین اتم‌ها (مُد‌های اپتومکانیکی) با میدان‌های اپتیکی هستند. با استفاده از رهیافت مرجع [۵] و با اعمال فرض‌های $\lambda_1 = \lambda'_1$ و $\omega_1 = \omega_2 = \omega_M$ ، $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}'_1$ ، $G = G'$ ، $\lambda_2 = \lambda'_2$ ، پس از محاسباتی طولانی هامیلتونی مؤثر به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{(2,3)}^{eff} = & \frac{\lambda_1^2}{\omega_M} \sum_{i=2}^3 [\hat{\sigma}_{11}^i + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 (\hat{\sigma}_{11}^i - \hat{\sigma}_{33}^i)] \\ & + \frac{\lambda_2^2}{\omega_M} \sum_{i=2}^3 [\hat{\sigma}_{22}^i + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 (\hat{\sigma}_{22}^i - \hat{\sigma}_{33}^i)] \\ & + \frac{\lambda_1^2}{\omega_M} (\hat{\sigma}_{13}^2 \hat{\sigma}_{31}^3 + h.c.) + \frac{\lambda_2^2}{\omega_M} (\hat{\sigma}_{23}^2 \hat{\sigma}_{32}^3 + h.c.) \\ & - \frac{G^2}{\omega_M} [(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1)^2 + (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2)^2] + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\omega_M} \left(\sum_{i=2}^3 \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_{12}^i + h.c. \right) \\ & - \frac{G \lambda_1}{\omega_M} \left(\sum_{i=2}^3 \hat{a}_1 \hat{b}_1 \hat{\sigma}_{13}^i + h.c. \right) - \frac{G \lambda_2}{\omega_M} \left(\sum_{i=2}^3 \hat{a}_2 \hat{b}_2 \hat{\sigma}_{23}^i + h.c. \right). \end{aligned} \quad (3)$$

با در نظر گرفتن حالت اولیه اتم‌های سه‌ترازی ۱ تا ۴ (حالت اولیه برای مُد‌های $|a_1, a_2; b_1, b_2\rangle$) به صورت $|\psi(0)\rangle_{(1,2)} \otimes |\psi(0)\rangle_{(3,4)}$ ، هامیلتونی مؤثر (۳) و حل معادله شرودینگر $i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_{(2,3)}^{eff} |\psi(t)\rangle$ ، حالت کلی سامانه را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & A_1(t) |0,0;0,0;\tilde{1},\tilde{3};\tilde{3},\tilde{1}\rangle + A_2(t) |0,0;0,0;\tilde{1},\tilde{3};\tilde{1},\tilde{3}\rangle \\ & + A_3(t) |0,0;0,0;\tilde{1},\tilde{1};\tilde{3},\tilde{3}\rangle + A_4(t) |1,0;1,0;\tilde{1},\tilde{3};\tilde{3},\tilde{3}\rangle \\ & + A_5(t) |0,0;0,0;\tilde{3},\tilde{1};\tilde{1},\tilde{3}\rangle + A_6(t) |1,0;1,0;\tilde{3},\tilde{3};\tilde{1},\tilde{3}\rangle \\ & + A_7(t) |1,0;1,0;\tilde{3},\tilde{1};\tilde{3},\tilde{3}\rangle + A_8(t) |2,0;2,0;\tilde{3},\tilde{3};\tilde{3},\tilde{3}\rangle \\ & + A_9(t) |0,0;0,0;\tilde{3},\tilde{1};\tilde{3},\tilde{1}\rangle + A_{10}(t) |0,0;0,0;\tilde{3},\tilde{3};\tilde{1},\tilde{1}\rangle \\ & + A_{11}(t) |1,0;1,0;\tilde{3},\tilde{3};\tilde{3},\tilde{1}\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

ویژگی بین بخش‌های دور از هم ایجاد می‌شود. درهم‌تنیدگی می‌تواند با ایجاد برهم‌کنش [۲] بین بخش‌های غیردرهم‌تنیده منتقل شود. این برهم‌کنش‌ها شامل برهم‌کنش بین اتم و میدان کوانتومی است که می‌تواند در یک کاواک اپتیکی یا اپتومکانیکی آماده‌سازی شود. کاواک اپتومکانیکی شامل یک آینه متحرک است که در آن فشار تابشی داخل کاواک می‌تواند منجر به حرکت آینه از موضع تعادل شود [۳].



مدل و روابط پایه: هدف ما ایجاد درهم‌تنیدگی بین دو اتم سه‌ترازی دور از هم است که از اهداف معرفی پروتکل

شکل ۱: مدل تکرارگر کوانتومی: همه گره‌ها شامل دو اتم سه‌ترازی در برهم‌کنش با دو مُد میدان هستند، برهم‌کنش‌ها در دو گره ابتدایی و انتهایی در کاواک‌های اپتومکانیکی OM و در گره میانی در کاواک اپتیکی OP انجام می‌شود.

تکرارگر کوانتومی است. با وارد کردن سه گره کوانتومی (هر گره شامل دو اتم در حال برهم‌کنش با میدان کوانتومی است) بین دو اتم هدف (شکل ۱)، فاصله بین این دو اتم را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم. اکنون سامانه کلی شامل هشت اتم سه‌ترازی ۱ تا ۸ نوع V با ترازهای $|\tilde{i}\rangle (i=1,2,3)$ است به نحوی که جفت‌های (۱، ۲) و (۳، ۴) در حالت‌های درهم‌تنیده زیر آماده‌سازی شده‌اند:

$$|\psi(0)\rangle_{(j,j+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\tilde{1},\tilde{3}\rangle + |\tilde{3},\tilde{1}\rangle), \quad j=1,3. \quad (1)$$

اتم‌های سه‌ترازی (۲، ۳) با عملگرهای گذار اتمی $\hat{\sigma}_{lm}^k = |\tilde{l}\rangle_k \langle \tilde{m}|$ در یک کاواک به ترتیب با بسامدهای گذار $(\tilde{\omega}'_i, \tilde{\omega}_i)$ ، در حضور دو مُد اپتیکی (دو مُد اپتومکانیکی) $(\hat{b}_2, \hat{b}_1) \hat{a}_2, \hat{a}_1$ با بسامدهای $(\omega_2, \omega_1) \Omega_2, \Omega_1$ با هامیلتونی تاویز-کامینگز زیر برهم‌کنش می‌کند [۴]:

حالت خلاء برای میدان‌ها (که منجر به حذف جملاتی مانند $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ می‌شود)، به صورت زیر حاصل می‌شود [۵]:

$$\hat{H}_{(4,5)}^{eff} = \frac{\lambda_1^2}{\omega_M} [\sum_{i=4}^5 \hat{\sigma}_{11}^i + (\hat{\sigma}_{13}^4 \hat{\sigma}_{31}^5 + h.c.)] \quad (10)$$

$$+ \frac{\lambda_2^2}{\omega_M} [\sum_{i=4}^5 \hat{\sigma}_{22}^i + (\hat{\sigma}_{23}^4 \hat{\sigma}_{32}^5 + h.c.)].$$

حالت سامانه شامل چهار اتم (۱، ۴، ۵، ۸) بعد از برهم‌کنش توصیف شده با هامیلتونی (۱۰) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|\psi(t)\rangle_{(1,4,5,8)} = B_1(t)|\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}\rangle + B_2(t)|\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{3}, \tilde{3}\rangle \quad (11)$$

$$+ B_3(t)|\tilde{1}, \tilde{3}, \tilde{1}, \tilde{3}\rangle + B_4(t)|\tilde{3}, \tilde{3}, \tilde{1}, \tilde{1}\rangle$$

$$+ B_5(t)|\tilde{3}, \tilde{1}, \tilde{3}, \tilde{1}\rangle + B_6(t)|\tilde{3}, \tilde{3}, \tilde{3}, \tilde{3}\rangle,$$

که ضرایب آن در زیر تعریف شده است:

$$B_1(t) = \frac{A_1(t)}{N(t)} e^{-i\frac{2\lambda_1^2}{\omega_M}(t-t)}, B_2(t) = B_4(t) = \frac{A_1(t)A_8(t)}{2N(t)} \left(1 + e^{-i\frac{2\lambda_1^2}{\omega_M}(t-t)} \right), \quad (12)$$

$$B_3(t) = B_5(t) = -\frac{A_1(t)A_8(t)}{2N(t)} \left(1 - e^{-i\frac{2\lambda_1^2}{\omega_M}(t-t)} \right), B_6(t) = \frac{A_8(t)}{N(t)},$$

$$N(t) = |A_1(t)|^2 + |A_8(t)|^2.$$

حال با اندازه‌گیری حالت‌های $|\tilde{3}, \tilde{1}\rangle$ و $|\tilde{1}, \tilde{3}\rangle$ مربوط به اتم‌های (۴، ۵) روی حالت (۱۱)، اتم‌های (۱، ۸) به ترتیب به حالت‌های درهم‌تنیده زیر

$$|\psi(t)\rangle_{(1,8)} = \frac{1}{\sqrt{|B_2(t)|^2 + |B_5(t)|^2}} (B_2(t)|\tilde{1}, \tilde{3}\rangle + B_5(t)|\tilde{3}, \tilde{1}\rangle) \quad (13)$$

$$|\psi'(t)\rangle_{(1,8)} = \frac{1}{\sqrt{|B_3(t)|^2 + |B_4(t)|^2}} (B_3(t)|\tilde{1}, \tilde{3}\rangle + B_4(t)|\tilde{3}, \tilde{1}\rangle) \quad (14)$$

با آنروپی یکسان $E_{1,8}(t) = 1 - \frac{|B_3(t)|^4 + |B_4(t)|^4}{(|B_3(t)|^2 + |B_4(t)|^2)^2}$ منتقل

می‌شوند. با در نظر گرفتن $G=0$ ضریب $A_8(t)$ در رابطه (۶) و به دنبال آن درهم‌تنیدگی بین اتم‌های (۴، ۵) و (۸، ۱) صفر می‌شود و نمی‌توان درهم‌تنیدگی را بین دو اتم هدف ایجاد کرد، بنابراین در تمامی مراحل نمی‌توان G را برابر با صفر در نظر گرفت.

حال با اندازه‌گیری حالت $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0;0\rangle + |2;2\rangle)|\tilde{3}, \tilde{3}\rangle$ (مربوط به جفت اتم (۲، ۳) و مدهای (a_1, b_1)) روی حالت (۴) حالت زیر برای اتم‌های (۴، ۱) به دست می‌آید:

$$|\psi(t)\rangle_{(1,4)} = \frac{1}{\sqrt{|A_1(t)|^2 + |A_8(t)|^2}} (A_1(t)|\tilde{1}, \tilde{1}\rangle + A_8(t)|\tilde{3}, \tilde{3}\rangle) \quad (5)$$

$$A_1(t) = \frac{1}{2}, \quad (6)$$

$A_8(t) = \text{Inverse Laplace Transform}$

$$\left[-\left(\frac{G\lambda_1}{\omega_M} \right)^{-2} s^3 + 6s \right]^{-1}, s, t \left[e^{i\frac{4(G^2 + \lambda_1^2)}{\omega_M} t} \right].$$

نهایتاً، درهم‌تنیدگی بین اتم‌های (۴، ۱) برای حالت (۵) (با معیار آنروپی) برابر با مقدار زیر به دست می‌آید:

$$E_{1,4}(t) = 1 - \frac{|A_1(t)|^4 + |A_8(t)|^4}{(|A_1(t)|^2 + |A_8(t)|^2)^2}. \quad (7)$$

باید در نظر داشت که با انتخاب مقدار صفر برای G به دلیل صفر شدن ضریب $A_8(t)$ ، درهم‌تنیدگی بین اتم‌های (۴، ۱) کاملاً نابود می‌شود.

تمام عملیات قبل برای اتم‌های (۵، ۶، ۷، ۸) تکرار می‌شود و در نهایت حالتی مشابه با حالت اتم‌های (۴، ۱) برای اتم‌های (۵، ۸) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$|\psi(t)\rangle_{(5,8)} = \frac{1}{\sqrt{|A_1(t)|^2 + |A_8(t)|^2}} (A_1(t)|\tilde{1}, \tilde{1}\rangle + A_8(t)|\tilde{3}, \tilde{3}\rangle). \quad (8)$$

اکنون جفت اتم‌های سه‌ترازی (۴، ۵) با حالت اولیه $|\psi(t)\rangle_{(1,4)} \otimes |\psi(t)\rangle_{(5,8)}$ را وارد برهم‌کنش دیگری در غیاب مدهای اپتومکانیکی به صورت زیر می‌کنیم:

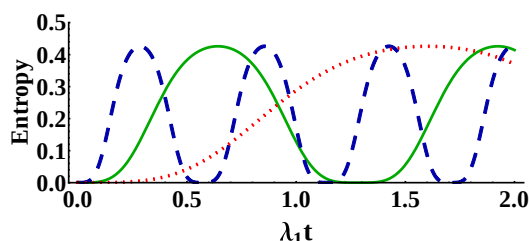
$$\hat{H}_{(4,5)} = \sum_{i=1}^3 \tilde{\omega}_i \hat{\sigma}_{ii}^4 + \sum_{i=1}^3 \tilde{\omega}'_i \hat{\sigma}_{ii}^5 + \sum_{i=1}^2 \Omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (9)$$

$$+ \lambda_1(\hat{a}_1 \hat{\sigma}_{13}^4 + h.c.) + \lambda_2(\hat{a}_2 \hat{\sigma}_{23}^4 + h.c.)$$

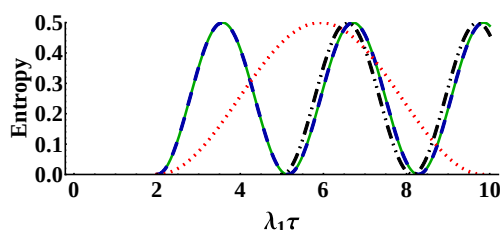
$$+ \lambda'_1(\hat{a}_1 \hat{\sigma}_{13}^5 + h.c.) + \lambda'_2(\hat{a}_2 \hat{\sigma}_{23}^5 + h.c.),$$

که این بار هامیلتونی مؤثر با اعمال فرض $\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_3 - \Omega_1 = \omega_M = \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_3 - \Omega_2$ و با در نظر گرفتن

بررسی درهم‌تنیدگی: در این قسمت به بررسی تأثیر شدت جفت‌شدگی مُد اپتومکانیکی با مُد میدان (G)، بسامد مُد اپتومکانیکی (ω_M) و زمان برهم‌کنش اولیه ($\lambda_1 t$) بر میزان درهم‌تنیدگی (آنتروپی) می‌پردازیم.



شکل ۲: نمودار آنتروپی برای اتم‌های (۴، ۱) و (۸، ۵) بر حسب زمان مقیاس‌بندی شده $\lambda_1 t$ برای $\omega_M/\lambda_1 = 2$ ، $G/\lambda_1 = 9$ (پیوسته سبز)، $\omega_M/\lambda_1 = 2$ ، $G/\lambda_1 = 4$ (خط چین آبی) و $\omega_M/\lambda_1 = 5$ ، $G/\lambda_1 = 4$ (نقطه چین قرمز).



شکل ۳: نمودار آنتروپی برای اتم‌های (۸، ۱) بر حسب زمان مقیاس‌بندی شده $\lambda_1 \tau$ برای $\omega_M/\lambda_1 = 2$ ، $G/\lambda_1 = 9$ (پیوسته سبز)، $\omega_M/\lambda_1 = 2$ ، $G/\lambda_1 = 4$ (خط چین آبی) و $\omega_M/\lambda_1 = 5$ ، $G/\lambda_1 = 4$ (نقطه چین قرمز).

در شکل ۲ تأثیر پارامترهای ω_M (بسامد مُد اپتومکانیکی) و G (شدت جفت‌شدگی مُد اپتومکانیکی با مُد میدان) را بر میزان درهم‌تنیدگی بین اتم‌های (۴، ۱) یا (۸، ۵) (یعنی آنتروپی در مراحل میانی) مورد بررسی قرار داده‌ایم. منحنی‌های موجود در این شکل با خط پیوسته سبزرنگ مقایسه می‌شوند. نمودار خط‌چین آبی تأثیر G را بر میزان درهم‌تنیدگی نشان می‌دهد، که با افزایش این پارامتر، دوره تناوب کاهش یافته است. نقطه‌چین قرمز رنگ تأثیر ω_M را بر میزان درهم‌تنیدگی بین اتم‌های هدف (۸، ۱) مورد بررسی قرار داده‌ایم. در این شکل نیز سایر منحنی‌ها

با خط پیوسته سبزرنگ مورد مقایسه قرار می‌گیرند. خط‌چین آبی رنگ تأثیر شدت جفت‌شدگی مُد اپتومکانیکی با مُد میدان را بر میزان آنتروپی نشان می‌دهد. انطباق این منحنی بر خط سبزرنگ مشهود است و حاکی از عدم تأثیر این پارامتر بر میزان درهم‌تنیدگی نهایی است. نقطه‌چین قرمز رنگ، تأثیر بسامد مُد اپتومکانیکی را بر آنتروپی نشان می‌دهد که با افزایش آن، دوره تناوب درهم‌تنیدگی مانند قبل (شکل ۲) افزایش یافته است. خط-نقطه مشکی، تأثیر زمان برهم‌کنش اولیه ($\lambda_1 t$) را بر میزان درهم‌تنیدگی نشان می‌دهد که در اینجا دوره تناوب آنتروپی تفاوتی نکرده است. به طور کلی، رفتار آنتروپی در تمام شرایط نوسانی و منظم است.

نتیجه‌گیری: تغییر شدت جفت‌شدگی مُد اپتومکانیکی با مُد میدان تأثیری بر نتیجه نهایی (آنتروپی اتم‌های هدف (۸، ۱)) ندارد اما افزایش آن در مراحل میانی (آنتروپی اتم‌های (۴، ۱) و (۸، ۵)) موجب کاهش دوره تناوب درهم‌تنیدگی می‌شود. افزایش بسامد مُد اپتومکانیکی در تمامی مراحل (میانی و نهایی) موجب افزایش دوره تناوب درهم‌تنیدگی می‌شود. در مرحله میانی صفرشدن G موجب تخریب کامل درهم‌تنیدگی بین اتم‌های (۴، ۱) و (۸، ۵) می‌شود و نمی‌توان به حالت درهم‌تنیده بین اتم‌های (۸، ۱) دست یافت. هم‌چنین، رفتار منظم و نوسانی آنتروپی در تمامی مراحل و در همه شرایط بررسی شده حفظ می‌شود. احتمال موفقیت حالت‌های درهم‌تنیده اتم‌های (۸، ۱) نیز با مقادیر قابل قبول به دست آمد که به دلیل کمبود فضا از نوشتن آن‌ها صرف‌نظر کردیم.

مرجع‌ها

- [1] N. Sangouard, C. Simon, H. De Riedmatten and N. Gisin, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1, 2011.
- [2] R. Pakniat, M. K. Tavassoly and M. H. Zandi, *Opt. Commun.* **382**, 381, 2017.
- [3] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg and F. Marquardt, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 4, 2014.
- [4] M. Tavis and F. W. Cummings, *Phys. Rev.* **170**, 379, 1968.
- [5] D. F. James and J. Jonathan, *Can. J. Phys.* **85**, 625, 2007.