



## بررسی تحول و اشباع خطی بلند مدت لیزر الکترون آزاد در رژیم رامان

امیر چخماچی و لاله عطائی سرشت

پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، پژوهشکده فیزیک پلاسما و گداخت هسته ای

چکیده - در این مقاله با استفاده از نظریه غیر خطی، تحول زمانی شبه خطی تابع توزیع باریکه الکترونی، انرژی باریکه و چگالی انرژی امواج اختلالی، در لیزر الکترون آزاد با حضور موج بار فضا و در رژیم رامان بررسی شده است. تحول زمانی شبه خطی سیستم در مدت زمان طولانی با در نظر گرفتن مدل "water-bag" برای تابع توزیع مورد بررسی قرار گرفته است. برای داشتن طیف نسبتاً وسیعی از ذرات تشدید گستره ی پهنی از امواج در نظر گرفته شده اند. با استفاده از معادلات ولاسوف- ماکسول و توصیف شبه خطی، معادلات تحول شبه خطی در زمان طولانی برای اندازه حرکت میانگین و پهنای تابع توزیع ذرات، انرژی پرتو ذرات، طیف انرژی موج اختلالی و نیز بازده سیستم بدست آمده است.

کلید واژه- تحول شبه خطی، لیزر الکترون آزاد، رژیم رامان، بازده، اشباع

## Long-time Quasilinear evolution and saturation of free electron laser in Raman regime

Chakhmachi Amir and Ataeiseresht laleh

Nuclear Science and Technology Institute, Plasma Physics and Nuclear Fusion Research School

Abstract- The long-time quasilinear evolution of the electron beam distribution function and the spectral energy density in a free- electron laser in presence of the space charge wave is investigated. The long-time quasilinear evolution of system is investigated within the context of a simple "water-bag" model for distribution function. A broad spectrum of waves is assumed in order to have a relatively wide range of resonant particles. By means of the Vlasov- Maxwell equation the long time quasilinear evolution of the mean electron momentum, the momentum spread, the spectral energy density, the beam energy and the efficiency of free electron laser are derived in Raman regime.

Keywords: quasilinear evolution, free electron laser, Raman regime, efficiency, saturation

## ۱- مقدمه

رژیم رامان (چگالی پرتو ذرات بالا و انرژی پرتو کم است) مورد بررسی و مطالعه قرار دهیم.

## ۲- مدل فیزیکی

پرتو الکترونی نسبیتی چگال و بدون برخوردی را در نظر بگیرید که در راستای محور  $z$  ها در داخل یک میدان مغناطیسی چرخشی  $B_0 = -B_\omega \cos k_0 z \hat{e}_x - B_\omega \sin k_0 z \hat{e}_y$  در حال انتشار است. که در این رابطه  $B_\omega = \text{const}$  دامنه‌ی میدان پیچشی و  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$  طول موج تولید تابش لیزر الکترون آزاد است. اساس مدل شبه خطی بر پایه معادلات غیر خطی و نسبیتی ولاسوف-ماکسول برای یک دسته مشخص از توابع توزیع پرتو ذرات به شکل  $f_0(z, p_z, t) = n_0 \delta(p_x) \delta(p_y) G(z, p_z, t)$  بنا نهاده شده است که در آن  $n_0 = \text{const}$  و  $P_x$  و  $P_y$  به ترتیب چگالی تعادلی و اندازه حرکت‌های کانونی عرضی هستند. در مرجع [۳] تحول زمانی غیر خطی الکترون آزاد برای پتانسیل‌ها و میدان‌های اختلالی که تقریباً به آرامی تغییر می‌کنند و دارای تابع توزیع میانگین به شکل

$$G_0(p_z, t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dz G(z, p_z, t) \quad (1)$$

با طول تناوب  $2L$  هستند مورد بررسی قرار گرفته است. اگر از معادله غیر خطی ولاسوف روی طول تناوب استاتیکی  $2L$  میانگین گیری شود، تحول زمانی تابع توزیع میانگین  $G_0(p_z, t)$  حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial G_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \langle G \rangle = \frac{\partial}{\partial p_z} \langle \delta G \frac{\partial H}{\partial z} \rangle > 0 \quad (2)$$

و زمانی که فقط اندرکنش‌های خطی در نظر گرفته شود معادله خطی شده ولاسوف حاصل می‌گردد که تحول زمانی تابع توزیع اختلالی را برای اختلال‌های کوچک به دست می‌دهد.

$$\frac{\partial \delta G}{\partial t} + \frac{p_z}{\gamma m} \frac{\partial}{\partial z} \delta G - \left( \frac{\partial}{\partial z} \delta H \right) \frac{\partial}{\partial p_0} G_0 = 0 \quad (3)$$

بستگی زمانی کمیت اختلالی به صورت

$$\exp(-i \int_0^t dt' (\omega_k(t') + i\gamma(t')))$$

نظر گرفتن این فرضیات مطابق با مرجع [۳] می‌توان معادلات غیرخطی را برای تابع توزیع میانگین

بررسی تحول غیر خطی و اشباع لیزرهای الکترون آزاد چه از لحاظ نظری و چه از نظر عملی و آزمایشگاهی دارای اهمیت بسیار زیادی می‌باشند. از طریق این بررسی‌ها، بازده سیستم مشخص شده و می‌توان راهکارهایی جهت افزایش بازده سیستم پیشنهاد کرد. زمانی که طیف گسترده‌ای از امواج برانگیخته می‌شوند اشباع از طریق تحول شبه خطی صورت می‌گیرد. ناپایداری لیزر الکترون آزاد در دو رژیم اتفاق افتاده و قابل بررسی است. هنگامی که چگالی پرتو ذرات کم بوده و انرژی پرتو بالا است (سرعت میانگین ذرات پایین است)، مد بار-فضا تحریک نشده و ذرات از طریق موج پاندرماتو در ناپایداری شرکت می‌کنند این رژیم کاری ناپایداری، رژیم کامپتون نامیده می‌شود. زمانی که چگالی پرتو ذرات بالا بوده و انرژی پرتو کم است مد بار-فضا تحریک شده و ذرات مستقیماً از طریق این مد در ناپایداری و تبادل انرژی با امواج الکترومغناطیس شرکت می‌کنند در نتیجه پتانسیل  $\delta\phi$  مد بار-فضا حائز اهمیت شده و مکانیسم ناپایداری لیزر الکترون آزاد، وارد رژیم رامان می‌شود. اشباع شبه خطی پس از تقویت موج ورودی در زمانهای اولیه به سرعت از طریق تشکیل Platu یا یک ناحیه تخت در تابع توزیع ذرات پرتو الکترونی در حول و حوش ناحیه ناپایداری صورت می‌گیرد، این نوع اشباع، اشباع شبه خطی سریع لیزر الکترون آزاد نامیده شده و در مرجع [۱] در رژیم کامپتون مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. خواص و ویژگی‌های ناپایداری اعم از نرخ رشد و چگونگی انتشار امواج در لیزر الکترون آزاد در رژیم رامان در مرجع [۲] و اشباع شبه خطی سریع لیزر الکترون آزاد در رژیم رامان در مرجع [۳] به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. مسئله‌ای که در اینجا سوال برانگیز است این است که بعد از تشکیل این ناحیه تخت و اشباع اولیه و سریع، تحول تابع توزیع، چگونگی ناپایداری لیزر الکترون آزاد، مکانیسم تقویت و اشباع این مکانیسم به چه صورت است. این تحول ثانویه که بعد از اشباع اولیه شروع می‌شود، تحول شبه خطی بلند مدت لیزر الکترون آزاد نامیده می‌شود. در این مقاله سعی شده است با وارد کردن موج بارفضا ( $\delta\phi \neq 0$  و  $\delta E_z \neq 0$ ) تحول شبه خطی بلند مدت مکانیسم تقویت لیزر الکترون آزاد را در

مطالعه نمودیم. تابع توزیع  $G_0(p_z, t)$  به صورت زیر فرض شده است:

$$G_0(p_z, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta t} & |p_z - p_0(t)| \leq \Delta(t) \\ 0 & |p_z - p_0(t)| > \Delta(t) \end{cases} \quad (8)$$

که در این رابطه ممنتوم میانگین  $p_0(t)$  به صورت زیر است:

$$p_0 = \langle p_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp_z p_z G_0(p_z, t) \quad (9)$$

و نیم پهنای  $\Delta(t)$  به ریشه میانگین مربع ممنتوم با استفاده از رابطه

$$\langle (p_z - \langle p_z \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp_z (p_z - \langle p_z \rangle)^2 G_0(p_z, t) = 1/3 \Delta^2(t) \quad (10)$$

مربوط می‌شود. ملاحظات مربوط به تابع توزیع (۹) نشان می‌دهد که تحول زمانی تابع توزیع می‌تواند با بررسی تحول خودبخودی  $p_0(t)$ ،  $\Delta(t)$  و چگالی طیف انرژی، مورد مطالعه قرار گیرد. عبارت تحول زمانی ممنتوم میانگین  $p_0(t)$  با استفاده از معادلات (۴) و (۹) و انتگرال گیری روی  $p_z$  به دست می‌آید:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} D(p_z, t) \frac{\partial G_0}{\partial p_z} \quad (11)$$

که در این رابطه داریم:

$$(12)$$

$$\frac{\partial G_0}{\partial p_z} = \frac{1}{2\Delta(t)} [\delta(p_z - [p_0(t) - \Delta(t)]) - \delta(p_z - [p_0(t) + \Delta(t)])]$$

علاوه بر این نشان دادن توسعه زمانی نیم پهنای  $\Delta(t)$  ما از معادله (۱۰) و (۴) بهره می‌گیریم که این تحول به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\Delta(t) \frac{d\Delta(t)}{dt} = -3p_0(t) \frac{dp_0(t)}{dt} - 3 \int_{-\infty}^{\infty} dp_z D(p_z, t) \frac{\partial G_0}{\partial p_z} \quad (13)$$

با فرض اینکه موج پراکنده شده رو به جلو غیر تشدید و موج پراکنده شده به سمت عقب تشدید است و یا به عبارت دیگر  $|D_{k-k_0}^T| \ll |D_{k+k_0}^T|$ ،  $|\delta A_{k-k_0}^-| \ll |\delta A_{k+k_0}^+|$ ، علاوه بر آن مطابق با مرجع [۲] با استفاده از رابطه  $\delta H_k$  عبارت  $\delta p_k(k) / \delta A_{k-k_0}^- = a_\omega \chi_k^{(1)} / 2c^4 k^4 D_k^L$  می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\delta H_k = \left\{ \frac{eB_\omega}{2\gamma mc^2 k_0} - e \left( \frac{a_\omega \chi_k^{(1)}}{2c^2 k^2 D_k^L} \right) \right\} \delta A_{k-k_0}^- \exp(-i \int_0^t \Omega_k(t') dt') \quad (14)$$

بنابراین ضریب پخش به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$G_0(p_z, t)$  و چگالی انرژی تقویت اختلالات را به دست آورد. تحول زمانی  $G_0(p_z, t)$  به صورت [۳]

$$\frac{\partial}{\partial t} G_0(p_z, t) = \frac{\partial}{\partial p_z} (D(p_z, t) \frac{\partial}{\partial p_z} G_0(p_z, t)) \quad (4)$$

بدست می‌آید، که در این رابطه  $D(p_z, t)$  ضرایب پخش در فضای ممنتوم است و با استفاده از رابطه زیر معرفی می‌شود [۳ و ۱]:

$$D(p_z, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik^2 \frac{|\delta H_k|^2}{(\Omega_k - kV_z)} \quad (5)$$

تحول زمانی هامیلتونین اختلالی نرمالایز شده  $|\delta H_k|^2$  مطابق است [۳ و ۱] با:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\delta H_k|^2 = 2\gamma_k |\delta H_k|^2 \quad (6)$$

با استفاده از تجزیه فوریه اختلال و با در نظر گرفتن اختلال وابسته به زمان، معادله خطی شده و لاسوف رابطه پاشندگی بی در رو را به صورت زیر حاصل می‌کند:

$$c^2 k^2 D_k^L(\Omega_k) D_{k-k_0}^T(\Omega_k) = 1/2 a_\omega^2 [D_{k-k_0}^T(\Omega_k) + D_{k+k_0}^T(\Omega_k)] \times \{ [\chi_k^{(1)}]^2 - c^2 k^2 D_k^L(\Omega_k) [\chi_k^2 + \alpha_3 \omega_{Re}^2] \} \quad (7)$$

که در این رابطه توابع  $D_{k-k_0}^T$ ،  $D_{k+k_0}^T$  و  $D_k^L$  توابع دی الکتریک امواج عرضی و طولی و  $\chi_k^{(n)}$  پذیرفتاری مغناطیسی مؤثر هستند [۳ و ۱].

بنابراین مجموعه معادلات (۴-۷) شرح کاملی از معادلات غیر خطی سیستم را در رژیم رامان به دست می‌دهند.

## ۲-۱- تحول زمانی شبه خطی لیزر الکترون آزاد با استفاده از تابع توزیع water bag

مراجع [۱] و [۳] نشان می‌دهند که در شرایط تشدید ضعیف فرآیندهای شبه خطی سریع سبب هموارسازی و تشکیل plateau در ناحیه تشدید در تابع توزیع ذرات می‌شوند که مطابق با  $\frac{\partial G_0}{\partial p_z} \rightarrow 0$  در این ناحیه است. اکنون

سوال اینست که با گذشت زمان پس از شکل گیری سطح هموار چگونه تابع توزیع و چگالی انرژی طیفی تحول می‌یابد و چه زمان اشباع اتفاق می‌افتد. در این کار، ما تحول زمانی شبه خطی سیستم لیزر الکترون آزاد را در حضور موج بار فضا پس از تشکیل plateau، در مدت زمان طولانی به طور مفهومی با در نظر گرفتن مدل "water bag" به عنوان تابع توزیع در رژیم تشدید رامان

در اینجا زمان نرمالیزه  $t' = t/T_0$  به صورت  $t'$  تعریف می‌شود و  $T_0$  با رابطه  $T_0 = \lambda_0/c = 2\pi/ck_0$  تعریف می‌گردد. کمیت‌های  $p'_0$  و  $\Delta'$  به ترتیب به مقادیر نرمالیزه شده  $p_0/mc$  و  $\Delta_0/mc$  اشاره دارند.

معادلات (۲۰) و (۱۹) از طریق پارامترهای  $(\omega, k, \gamma_k)$  به تابش بستگی دارند که از رابطه پاشندگی (۷) به دست آمده‌اند. تحول زمانی چگالی انرژی طیفی  $\varepsilon_k(t)$  و شار توان میانگین  $p_k(t)$  توسط معادلات (۱۷) و (۱۶) داده شده است.

انرژی میانگین ذرات و بازده سیستم توسط روابط

$$n_0 mc^2 \bar{\gamma}(t) = n_0 mc^2 \left[ 1 + \frac{e^2 B_0^2}{m^2 c^4 k_0^2} + \frac{p_0^2(t)}{m^2 c^2} \right]^{1/2} \quad (21)$$

$$\eta(t) = \frac{\sum_k \varepsilon_k(t) - \sum_k \varepsilon_k(0)}{n_0 mc^2 (1 - \bar{\gamma}(0))} \quad (22)$$

به اندازه حرکت میانگین ذرات مرتبط می‌شوند در نتیجه می‌توان با استفاده از روابط (۷) و (۱۸)–(۲۰) هم خود این کمیتها و هم تحول زمانی آنها را در زمانهای مختلف بدست آورده و تحلیل کرد.

### ۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله دسته معادلات کامل و بسته ای (۲۲)–(۱۷)، جهت توصیف کامل تحول شبه خطی لیزر الکترون آزاد در رژیم رامن در زمان طولانی ارائه شد. با استفاده از حل عددی این دسته معادلات، می‌توان چگونگی تحول تابع توزیع از نظر تحول زمانی پهنا و ارتفاع آن، تحول مرکز تابع توزیع (اندازه حرکت میانگین ذرات)، چگونگی تغییر انرژی باریکه و بازده سیستم را تا رسیدن به زمان اشباع بررسی کرد. این مطالعه زمان دقیق اشباع، انرژی پرتو ذرات در زمان اشباع و از همه مهم تر میزان بازده را بدست می‌دهد. حل عددی این دسته معادلات اثر هر یک از پارامترهای، میدان ویگلر، تابع توزیع (از نظر شکل و پهن شدن در فضای فاز)، چگالی ها و انرژی های اولیه متفاوت را بر روی زمان اشباع و میزان بازده مکانیسم ارائه می‌دهد. با استفاده از نتایج بالا می‌توان مکانیسمی با پارامترهای بهینه طراحی کرد که بازده آن بیشینه باشد.

### مراجع

- [1] A. M. Dimos and R. C. Davidson, Phys. Fluids **28**, 677 (1985).
- [2] A. Chakhmachi and B. Maraghechi, Phys. Plasmas **16**, 043110 (2009).
- [3] A. Chakhmachi and B. Maraghechi, Phys. Plasmas **16**, 073107 (2009).

$$D(p_z, t) = 2e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_{\omega} \bar{\gamma}}{2\gamma} \right)^2 + \left| \frac{a_{\omega} \chi_k^{(1)}}{2c^2 k^2 D_k^L} \right|^2 - 2 \left( \frac{a_{\omega} \bar{\gamma}}{2\gamma} \right) \left| \frac{a_{\omega} \chi_k^{(1)}}{2c^2 k^2 D_k^L} \right| \right] \times \left[ \frac{k^2 \gamma_k}{(\omega_k - kv_z)^2 + \gamma_k^2} \right] |\delta A_{k-k_0}^-|^2 \quad (15)$$

### ۲-۲- تحول زمانی پارامترهای دینامیکی

با استفاده از هامیلتونین اختلالی (۱۴) چگالی طیف انرژی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\varepsilon_k(t) = \frac{1}{2\pi c} \left[ (\omega_k^2 + \gamma_k^2) + c^2 (k - k_0)^2 + 2c^2 k^2 \left| \frac{a_{\omega} \eta_k^{(1)}}{2(c^2 k^2 + \eta_k^{(0)})} \right|^2 \right] \times \frac{p_k(t)}{c(k - k_0)\omega_k^2} \quad (16)$$

که در آن  $p(t)$  شار توان میانگین در جهت  $z$  است.

$$p_k(t) = \frac{1}{8\pi c} [c(k - k_0)\omega_k] |\delta \bar{A}_{k-k_0}^-| \exp \left( 2 \int_0^t \gamma_k(t') dt' \right) \quad (17)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۱۷) رابطه زیر

$$\frac{\partial \varepsilon_k(t)}{\partial t} = 2\gamma_k(t) \varepsilon_k(t) \quad (18)$$

نتیجه می‌شود. عبارت لازم برای تحول زمانی ممنوم

میانگین با جایگذاری معادلات (۱۸)، (۱۷)، (۱۶) و (۱۵)

در معادله (۱۱) به شکل زیر بدست می‌آید:

$$n_0 \frac{dp_0(t')}{dt'} = - \frac{4\pi \bar{\gamma}}{\Delta'(t)} \left( \frac{\omega_{Re}^2}{c^2 k_0^2} \right) \frac{1}{m_e c^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[ \left( \frac{a_{\omega} \bar{\gamma}}{2\gamma_-} \right)^2 + \left| \frac{a_{\omega} \eta_k^{(1)}}{2(c^2 k^2 + \eta_k^{(0)})} \right|^2 \right] - 2 \left( \frac{a_{\omega} \bar{\gamma}}{2\gamma_-} \right) \left| \frac{a_{\omega} \eta_k^{(1)}}{2(c^2 k^2 + \eta_k^{(0)})} \right| \right] \times \frac{1}{(\omega_k - ck \frac{p'_0 - \Delta'}{\gamma_-}) + \gamma_k^2} - \left[ \left( \frac{a_{\omega} \bar{\gamma}}{2\gamma_+} \right)^2 + \left| \frac{a_{\omega} \eta_k^{(1)}}{2(c^2 k^2 + \eta_k^{(0)})} \right|^2 - 2 \left( \frac{a_{\omega} \bar{\gamma}}{2\gamma_+} \right) \left| \frac{a_{\omega} \eta_k^{(1)}}{2(c^2 k^2 + \eta_k^{(0)})} \right| \right] \frac{1}{(\omega_k - ck \frac{p'_0 - \Delta'}{\gamma_-}) + \gamma_k^2} \right\} \times \frac{c^3 k_0^2 \gamma_k}{c(k - k_0)\omega_k} P_k(t) \} \quad (19)$$

به همین روش برای تغییرات نیم پهنای  $\Delta(t)$  نسبت به

زمان داریم:

$$n_0 \frac{d\Delta(t')}{dt'} = \frac{12\pi \bar{\gamma}}{\Delta(t)} \left( \frac{\omega_{Re}^2}{c^2 k_0^2} \right) \frac{1}{m_e c^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[ \left( \frac{a_{\omega} \bar{\gamma}}{2\gamma_-} \right)^2 + \left| \frac{a_{\omega} \eta_k^{(1)}}{2(c^2 k^2 + \eta_k^{(0)})} \right|^2 - 2 \left( \frac{a_{\omega} \bar{\gamma}}{2\gamma_-} \right) \left| \frac{a_{\omega} \eta_k^{(1)}}{2(c^2 k^2 + \eta_k^{(0)})} \right| \right] \frac{1}{(\omega_k - ck \frac{p'_0 - \Delta'}{\gamma_-}) + \gamma_k^2} + \left[ \left( \frac{a_{\omega} \bar{\gamma}}{2\gamma_+} \right)^2 + \left| \frac{a_{\omega} \eta_k^{(1)}}{2(c^2 k^2 + \eta_k^{(0)})} \right|^2 - 2 \left( \frac{a_{\omega} \bar{\gamma}}{2\gamma_+} \right) \left| \frac{a_{\omega} \eta_k^{(1)}}{2(c^2 k^2 + \eta_k^{(0)})} \right| \right] \frac{1}{(\omega_k - ck \frac{p'_0 - \Delta'}{\gamma_+}) + \gamma_k^2} \right\} \times \frac{ck_0 c^2 k^2}{c(k - k_0)\omega_k} P_k(t') \quad (20)$$