



شبیه سازی عوامل موثر بر آشکارسازی فرانژهای تداخلی ژيروسکوپ لیزری با استفاده از ماتریس ABCD

مریم سلطانی، علیرضا کشاورز

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

چکیده - در این مقاله ضمن معرفی ژيروسکوپ لیزری و نحوه عملکرد آن، تداخل انتشار دو پرتو مختلف الجبهه در آن با استفاده از ماتریس $ABCD$ بررسی و شبیه سازی شده است. در ژيروسکوپ های لیزری به خاطر ایجاد دوران و اثر ساینک یک اختلاف فاز بین دو پرتو منتشر شده ایجاد می شود که هر چه این اختلاف فاز بیشتر باشد آشکارسازی فرانژهای تداخلی بهتر انجام می گیرد. به طوری که هر چه زاویه دوران و طول بازوهای ژيروسکوپ بیشتر و طول موج لیزر کمتر باشد اختلاف فاز ایجاد شده بیشتر می شود و در نتیجه آشکارسازی بهتر انجام می گیرد. بررسی تاثیر این عوامل با استفاده از ماتریس $ABCD$ و شبیه سازی تداخل صورت گرفته هدف اصلی این تحقیق است. نتایج نشان می دهد که هر چه طول بازوهای دستگاه بیشتر باشد قله شدت تداخلی افزایش می یابد و هر چه زاویه دوران بیشتر باشد تعداد فرانژهای تداخلی در مرکز پرده بیشتر می شود که این نشان دهنده بالا رفتن حساسیت دستگاه است و همچنین هر چه طول موج لیزر کمتر باشد فرانژهای واضح تری خواهیم داشت.

کلید واژه- ژيروسکوپ لیزری، فرانژهای تداخلی، ماتریس $ABCD$.

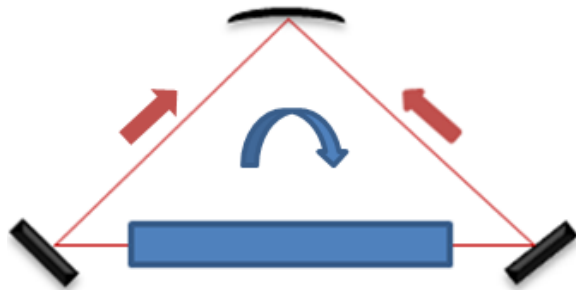
Simulation of effective factors on detection of interference fringe in laser gyroscope by using the ABCD matrix

Maryam Soltani, Alireza Keshavarz

Department Of Physics, Shiraz University Of Technology, Shiraz

Abstract- In this paper, laser gyroscope and its performance is introduced. Also, the interference of two beams of two opposite directions is simulated by using the ABCD matrix. In laser gyroscopes because of applied rotation and sagnac effect, a phase difference between two propagated beams is occurred that the greater phase difference so the better detection of the interference fringe is done. The greater the rotation angle and the greater the length sides of the laser gyroscope and the lower wavelength the greater phase difference is occurred and consequently the detection is done better. The main goal of this research is study the effect of these factors by using ABCD matrix and simulation of the interference fringes. Results show that the longer the length sides, leads to riser peak of the interference intensity and the greater the rotation angle, the greater number of interference fringes in center of the wall and thus the higher the sensitivity of the device and also the lower wavelength, the clearer fringes are obtained.

Keywords: laser gyroscope, interference fringes, ABCD matrix.



شکل ۱: طرح نمادین یک ژيروسکوپ لیزری با مشدد حلقوی

$$ct_+ = 2\pi R + \Omega R t_+ \rightarrow t_+ = \frac{2\pi R}{c - \Omega R} \quad (1)$$

$$ct_- = 2\pi R - \Omega R t_- \rightarrow t_- = \frac{2\pi R}{c + \Omega R} \quad (2)$$

که در آن Ω سرعت زاویه ای است. در نتیجه اختلاف راه نوری برابر است با:

$$\Delta L = 2\pi R \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega R}{c}} - \frac{1}{1 + \frac{\Omega R}{c}} \right) \approx \frac{4\pi \Omega R^2}{c} \quad (3)$$

برای یک لیزر حلقوی مطابق شکل ۱ طول کاواک برابر $L = m\lambda = \frac{mc}{g}$ است که m یک عدد صحیح است. بنابراین فرکانس دو پرتو مختلف الجهد به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} g_{\pm} = \frac{mc}{L_{\pm}} \rightarrow \Delta g = g_+ - g_- = \frac{mc}{L_+} - \frac{mc}{L_-} \\ = \frac{mc\Delta L}{L^2} = g \frac{\Delta L}{L} \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن از تقریب های $L_+ - L_- = \Delta L$ و $L_+ L_- = L^2$ استفاده شده است. با جایگزینی رابطه (۳) در رابطه (۴) خواهیم داشت:

$$\Delta g = \frac{4S\Omega}{\lambda L} \quad (5)$$

که g_+ فرکانس تغییر یافته در جهت چرخش، g_- فرکانس تغییر یافته در خلاف جهت چرخش، c سرعت نور در خلاء، S مساحت محصور توسط مشدد حلقوی، λ طول موج لیزر هلیوم نئون ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$) و L راه نوری مشدد است. اختلاف فاز به وجود آمده برابر است با:

$$\Delta \Phi = \frac{2\pi \Delta g}{c} L = \frac{8\pi \omega S}{c \lambda} \quad (6)$$

با استفاده از تداخل دو پرتو مختلف الجهد در محل آینه کروی و به دست آوردن فرانژهای تداخلی می توان اختلاف فاز ایجاد شده را محاسبه کرد. هر چه اختلاف فرکانس و یا اختلاف فاز ایجاد شده بیشتر باشد حساسیت دستگاه بالاتر و

۱- مقدمه

ژيروسکوپ وسیله ای است که برای اندازه گیری سرعت دوران، میزان انحراف و ایجاد محورهای مختصات مرجع در وسایل نقیه هوایی، فضایی، دریایی و هر وسیله ای که تعادل در آن مهم است کاربرد دارد [۱]. در ژيروسکوپ های لیزری به خاطر دوران ایجاد شده یک اختلاف فاز بین دو پرتو منتشر شده ایجاد می شود. هر چه این اختلاف فاز بیشتر باشد آشکارسازی فرانژهای تداخلی بهتر انجام می گیرد. روابط مربوط به اختلاف فاز در ژيروسکوپ لیزری نشان می دهد که هر چه زاویه دوران، طول بازوهای ژيروسکوپ بیشتر و طول موج لیزر کمتر باشد اختلاف فاز ایجاد شده بیشتر می شود و در نتیجه آشکارسازی فرانژهای تداخلی بهتر انجام می گیرد. در این مقاله به بررسی تاثیر این عوامل با استفاده از ماتریس ABCD و شبیه سازی تداخل پرتوهای لیزری پرداخته شده است.

۲- مبانی فیزیکی ژيروسکوپ لیزری

ژيروسکوپ لیزری شامل یک مشدد حلقوی سه گوشه (مثلثی شکل) و یا چهار گوشه (مستطیلی شکل) است که بر روی یک موتور قرار می گیرد و موتور این صفحه را دوران می دهد. در این مقاله آرایش مثلثی، مطابق شکل ۱، مد نظر قرار گرفته است. اساس کار ژيروسکوپ بر پایه اثر ساینک^۱ است. به طور خلاصه اگر دو پرتو یکی در جهت عقربه های ساعت و دیگری در خلاف جهت عقربه های ساعت در مشدد حلقوی حرکت کنند و یک دوران به این مشدد اعمال شود، مشاهده می شود که پرتویی که در جهت چرخش حرکت می کند نسبت به پرتوی دیگر، مسیر را در زمان بیشتری طی می کند و باعث ایجاد یک جابه جایی فاز بین دو پرتو می شود [۲]. فرض کنیم t_+ زمان طی شده برای پرتویی باشد که در جهت چرخش حرکت می کند و t_- زمان طی شده برای پرتویی باشد که در خلاف جهت چرخش حرکت می کند، اگر R شعاع مسیر دایروی و c سرعت نور در خلا باشد آن گاه اختلاف راه نوری طی شده توسط دو پرتو به صورت زیر محاسبه می شود [۳]:

¹ Sagnac effect

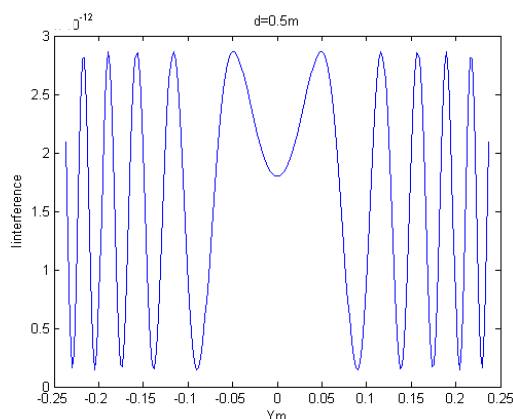
واقع می شود که لیزر در آن قرار دارد. اگر ماتریس ABCD برای یک دور کامل در ژيروسکوپ نوشته شود می توان ω_0 را به دست آورد. چنانچه طول هر بازو را d در نظر بگیریم ماتریس انتقال برای یک دور کامل در غیاب چرخش به صورت زیر می شود:

$$T_{roundtrip} = \begin{bmatrix} 1 & 3\frac{d}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3\frac{d}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

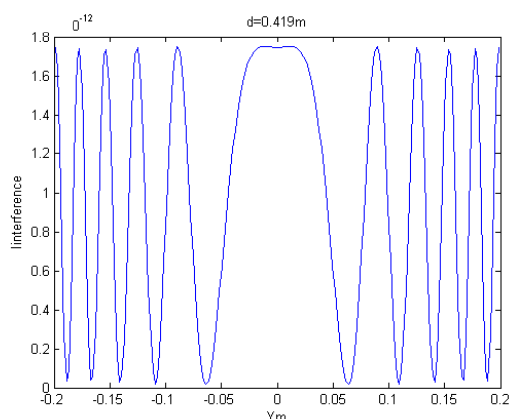
برای به دست آوردن ماتریس در حضور چرخش در محل آینه کروی راه نوری برای پرتو در جهت چرخش برابر ct_+ و برای پرتو در خلاف جهت چرخش برابر ct_- می شود.

۳-۱ نتایج حاصل از شبیه سازی

در شبیه سازی های انجام شده نرخ چرخش برابر $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ }^\circ/\text{s}$ در نظر گرفته شده است و شدت تداخلی دو پرتو ($I_{interference}$) برحسب فاصله تا فرانت مرکزی بر روی پرده (Y_m) رسم شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۲: شدت تداخلی برحسب فاصله تا فرانت مرکز به ازای الف: $d = 0.5m$ و ب: $d = 0.419m$ (واحد اختیاری)

در نتیجه آشکار سازی بهتر انجام می شود. همان طور که از روابط بالا انتظار می رود، هر چه طول موج لیزر کمتر، طول بازوهای ژيروسکوپ و همچنین زاویه دوران بیشتر باشد اختلاف فاز ایجاد شده بین دو پرتو بیشتر و در نتیجه آشکار سازی بهتر انجام می شود. در این تحقیق با استفاده از ماتریس ABCD به شبیه سازی تاثیر زاویه دوران، طول موج لیزر و طول بازوهای ژيروسکوپ لیزری بر فرانزهای تداخلی پرداخته شده است. در اینصورت با داشتن ماتریس ABCD یک سیستم می توان نور را در درون آن ردیابی و پارامترهای مورد نیاز را در هر نقطه از سیستم به دست آورد. ماتریس عبور از فضای آزاد به طول d ، بازتاب از آینه تخت و آینه کروی با شعاع انحنای R به ترتیب به صورت $\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$ است. اگر پرتو خروجی لیزر هلیوم نئون را گاوسی در نظر بگیریم میدان حاصل از این پرتو در مختصات استوانه ای به صورت زیر می باشد [۴]:

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{\omega^2(z)}\right] \times \exp\left\{-i\left[kz - \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)}\right]\right\} \quad (7)$$

که در آن ω_0 اندازه لکه در کمر باریکه، $\omega(z)$ اندازه لکه و $R(z)$ شعاع انحنای پرتو به فاصله z از کمر باریکه، k ثابت انتشار و z_0 طول رایلی است که اندازه لکه و شعاع انحنای طریق رابطه زیر به هم مربوط می شوند:

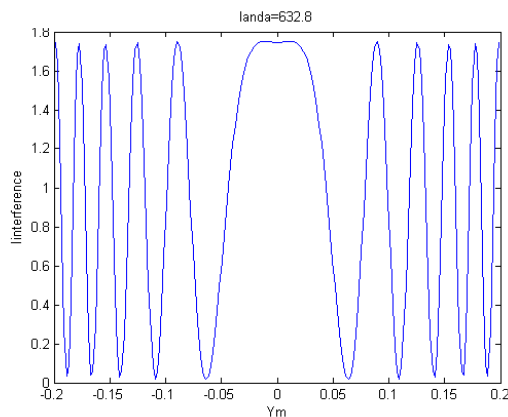
$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)} \quad (8)$$

بنابراین اگر q_1 و در نتیجه $R(z)$ و $\omega(z)$ را در نقطه ای از سیستم داشته باشیم با محاسبه ماتریس ABCD آن سیستم می توانیم از قانون ABCD اندازه لکه و شعاع انحنای پرتو را در هر نقطه دلخواه به دست آوریم:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + \frac{D}{q_1}}{A + \frac{B}{q_1}} \quad (9)$$

۳- شبیه سازی

چون اضلاع ژيروسکوپ با هم برابر است و سیستم متقارن است می توان نشان داد که کمر باریکه دقیقاً در وسط ضلعی



(ب)

شکل ۴: شدت تداخلی برحسب فاصله تا فرانتز مرکزی به ازای الف: $\lambda = 1064nm$ و ب: $\lambda = 632.8nm$ (واحد اختیاری)

۴- نتیجه‌گیری

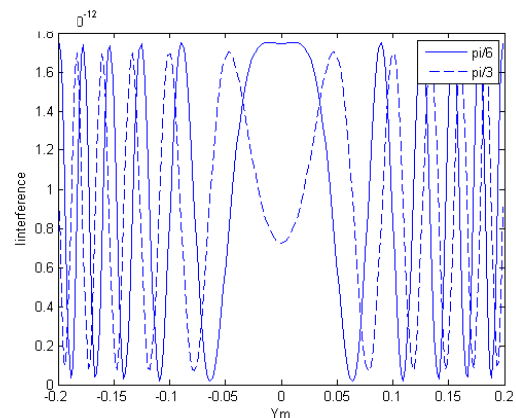
امروزه ژيروسکوپ‌های لیزری نقش مهمی را در سیستم‌های ناوبری و نظامی بازی می‌کنند. در این مقاله ابتدا به معرفی و نحوه عملکرد ژيروسکوپ پرداخته شد. به خاطر دوران دستگاه و اثر ساینک یک اختلاف فاز بین دو پرتو منتشر شده در دو جهت مخالف ایجاد می‌شود که هر چه این اختلاف فاز بیشتر باشد آشکارسازی فرانتزهای تداخلی بهتر انجام می‌گیرد. شبیه‌سازی انجام شده با استفاده از ماتریس ABCD به منظور بررسی عوامل موثر بر آن صورت گرفت. نتایج نشان می‌دهد که هر چه طول بازوهای دستگاه بیشتر باشد قله شدت تداخلی افزایش می‌یابد و آشکار سازی فرانتزهای تداخلی بهتر انجام می‌گیرد و هر چه زاویه دوران بیشتر باشد تعداد فرانتزهای تداخلی در مرکز پرده بیشتر می‌شود که این نشان دهنده بالا رفتن حساسیت دستگاه است و همچنین هر چه طول موج لیزر کمتر باشد طرح تداخلی واضح‌تری خواهیم داشت.

مراجع

- [1] M. N. Armenise, C. Ciminelli, F. Dell'Olio, V. M. N. Passaro, "Advances in Gyroscope Technologies", Springer, 2010.
- [2] A. Tartaglia, M.L. Ruggiero, "Sagnac effect and pure geometry", *American Journal of Physics*, Vol. 83, pp. 427-432, 2015.
- [3] M. Pizzocaro, "Development of a ring laser gyro: active stabilization and sensitivity analysis", tesis, 92p, 2009.
- [4] J. T. Verdeyen, *Laser Electronics*, p.77, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1995.

در شکل ۲ (الف) و (ب) به ترتیب شدت تداخلی دو پرتو برای دو طول بازوی $d = 0.419m$ و $d = 0.5m$ شبیه‌سازی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر چه طول بازوهای ژيروسکوپ لیزری بیشتر باشد قله شدت در هنگام آشکارسازی بیشتر می‌شود و در نتیجه فرانتزهای تداخلی بهتر ایجاد می‌شوند که این نتیجه در رابطه (۶) هم مشخص است.

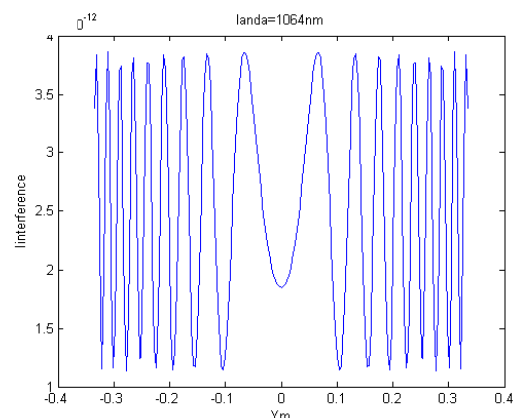
شکل ۳ شدت تداخلی دو پرتو برای دو زاویه دوران $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ شبیه‌سازی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر چه زاویه دوران بیشتر باشد تعداد قله‌ها در مرکز پرده بیشتر می‌شود که این نشان دهنده افزایش حساسیت دستگاه در زاویه دوران‌های بزرگتر است.



شکل ۳: شدت تداخلی برحسب فاصله تا فرانتز مرکزی برای دو زاویه

دوران $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ (واحد اختیاری)

شکل ۴ (الف) و (ب) به ترتیب شدت تداخلی دو پرتو برای دو طول موج $\lambda = 632.8nm$ و $\lambda = 1064nm$ شبیه‌سازی شده است.



(الف)