



حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر روی سطح یک کره

زهره هیبتي گوجاني^۱، علي مهديفر^۱ و احسان عموقربان^۲

^۱ گروه فیزیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

^۲ گروه پژوهشی فوتونیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

چکیده - در این مقاله ابتدا نحوه بدست آوردن طیف انرژی یک نوسانگر هماهنگ دو بعدی روی سطح کره را مطالعه می‌کنیم. سپس با استفاده از روش گازیو-کلاودر برای طیف گسسته انرژی، حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر را روی سطح کره به دست می‌آوریم. در ادامه، برخی از ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس مزبور را بررسی می‌کنیم.

کلید واژه- حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر، نوسانگر هماهنگ دو بعدی روی سطح کره

Gazeau- Klauder Coherent states on a sphere

Z. Heibati Gojani¹, A. Mahdifar^{1, 2} and E. Amooghorban^{1, 2}

¹ Department of Physics, University of Shahrekord, Shahrekord

² Photonic Research Group, University of Shahrekord, Shahrekord

Abstract- In this paper, we first study energy spectrum of a two- dimensional harmonic oscillator on a sphere. Then, by using the obtained discrete energy spectrum, we construct Gazeau- Klauder coherent states on the sphere, In what follows, we investigate the quantum optical properties of the constructed coherent states.

Keywords: Gazeau- Klauder coherent states, Two- dimensional harmonic oscillator on a sphere

۱- مقدمه

یکی از دستگاه مختصات‌های مناسب برای یک نوسانگر هماهنگ دو بعدی روی سطح کره استفاده از مختصات ژنومی (به زبان حرفه ای در کارتوگرافی) است. این مختصات، مختصات دکارتی روی صفحه مماسی بر کره است. بدین صورت که برای یافتن هر نقطه از مختصات کره، از مرکز کره به نقطه مورد نظر شعاعی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا صفحه مماسی را قطع کند. استفاده از این دستگاه مختصات از این مزیت برخوردار است که حرکت ذره‌ی آزاد روی کره در صفحه مماسی روی یک خط مستقیم تصویر می‌شود. حال اگر مختصات دکارتی روی صفحه‌ی مماسی را با x و y نشان دهیم، در این مختصات هامیلتونی نوسانگر هماهنگ روی سطح یک کره با شعاع R و

خمیدگی $\lambda = \frac{1}{R^2}$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: [۱]

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{\pi}^2 + \lambda \hat{L}^2) + \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \quad (۱)$$

که در آن داریم:

$$\vec{\pi} = \vec{p} + \frac{\lambda}{2} \left[\vec{x} (\vec{x} \cdot \vec{p}) + (\vec{p} \cdot \vec{x}) \vec{x} \right],$$

$$\hat{L}^2 = \frac{1}{2} \hat{L}_{ij} \hat{L}_{ij}, \quad L_{ij} = \hat{x}_i \hat{p}_j - \hat{x}_j \hat{p}_i. \quad (۲)$$

می‌توان نشان داد که برای این نوسانگر جبر زیر برقرار است: [۲]

$$[\hat{n}, \hat{A}^+] = \hat{A}^+, [\hat{n}, \hat{A}] = \hat{A}, \quad (۳)$$

می‌توان نشان داد که برای نوسانگر هماهنگ دو بعدی روی سطح کره تابع ساختار به شکل

$$\Phi(E, n) = E^2 - \left(w^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda E \right) (2n+2u-1)^2 + \frac{\lambda^2}{4} (2n+2u-1)^4. \quad (۴)$$

و ویژه مقادیر انرژی با رابطه زیر بیان می‌شود [۲]

$$(E_N)_{\text{sphere}} \equiv (E_N)_s = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4}} (N+1) + \frac{\lambda}{2} (N+1)^2. \quad (۵)$$

که در آن تابع ساختار $\Phi_s(E, n)$ یک تابع حقیقی مثبت برای $n > 0$ و $\Phi_s(E, 0) = 0$ است. با شرط

$$\Phi_s(E, N+1) = 0, \quad (۶)$$

آنگاه جبر نوسانگر هماهنگ مزبور دارای یک نمایش متناهی است، به طوری که N بعد نمایش جبر و بعد فضای فوک متناهی الابعاد مربوط را نشان می‌دهد.

۲- حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر برای طیف

انرژی گسسته

به طور کلی برای سامانه‌ای با طیف انرژی گسسته حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر به صورت زیر تعریف می‌شود: [۳] و [۴]

$$|J, \gamma\rangle = N^{-1} (J) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^{n/2} e^{-i(e_n \gamma)}}{\sqrt{\rho_n}} |n\rangle. \quad (۷)$$

در این رابطه $0 \leq J < R$ بوده که R شعاع همگرایی نامیده می‌شود و رابطه‌ی آن به صورت زیر است:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho_n}. \quad (۸)$$

همچنین داریم:

$$\rho_n \equiv \int_0^R u^n \rho(u) du \quad \text{و} \quad \rho(u) \geq 0. \quad (۹)$$

$N(J)$ نیز توسط شرط بهنجارش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N^2(J) = \sum_{n=0}^{\infty} J^n / \rho_n. \quad (۱۰)$$

اگر شرط $0 = e_0 < e_1 < e_2 \dots$ را اعمال کنیم، آنگاه داریم:

$$\rho_n = e_1 e_2 \dots e_n. \quad (۱۱)$$

حالت تعریف شده با رابطه (۷) یک حالت همدوس است اگر چهار شرط زیر را دارا باشد:

۱- پیوستگی در برچسب؛ اگر $(J, \gamma) \rightarrow (J', \gamma')$ میل کند باید داشته باشیم:

$$|J, \gamma\rangle \rightarrow |J', \gamma'\rangle.$$

۲- برقرار بودن رابطه تفکیک

$$\int |J, \gamma\rangle \langle J, \gamma| d\mu(J, \gamma) = 1.$$

۳- رابطه‌ی تحول زمانی به صورت زیر برقرار باشد:

$$e^{-iHt} |J, \gamma\rangle = |J, \gamma + \omega t\rangle.$$

۴- برقرار بودن رابطه‌ی کنش واحد:

$$\langle J, \gamma | H | J, \gamma \rangle = \omega J.$$

۳- حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر روی سطح

کره:

ویژه مقادیر انرژی نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره از رابطه (۵) به دست آمد، حال برای ساختن حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر مربوط به این سامانه باید e_n و ρ_n را محاسبه کنیم و در رابطه (۷) جایگذاری کنیم. با تعریف

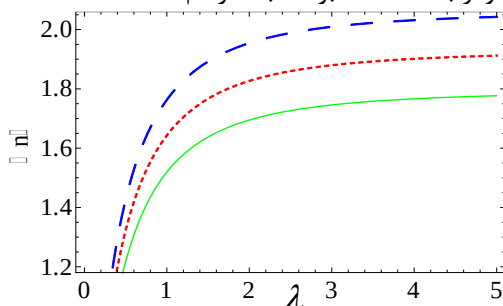
در این بخش، برخی از خواص آمار کوانتومی از قبیل تعداد متوسط فوتونها، پارامتر مندل و چلانگی حالت‌های همدوس مزبور را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴-۱- شمار میانگین و آمار شمارش فوتونها

شمار میانگین فوتونها در حالت $|J, \gamma\rangle$ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\langle n \rangle = \frac{J^{\frac{\mu}{2}}}{I_{\mu}(2\sqrt{J})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{n! \Gamma(n+\mu+1)} n. \quad (19)$$

در شکل ۱ شمار میانگین فوتونها برای حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر بدست آمده برحسب λ رسم شده است.



شکل ۱: شمار میانگین فوتونها برای حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر برحسب λ برای $J=10$ (خط توپر)، $J=11$ (نقطه چین) و $J=12$ (خط چین).

همانطور که دیده می‌شود، با افزایش λ تعداد متوسط فوتونها افزایش می‌یابد. علاوه بر این افزایش خمیدگی فضای فیزیکی کره نیز باعث افزایش شمار میانگین فوتونها می‌شود.

۴-۲- پارامتر مندل

برای مطالعه‌ی آمار فوتونها برای حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر مزبور لازم است پارامتر مندل $[\Delta]$ یعنی

$$Q = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle}, \quad (20)$$

را مورد بررسی قرار دهیم. مقادیر مثبت، صفر و منفی پارامتر مزبور به ترتیب نشانگر آمار فراپواسونی، آمار پواسونی و آمار زیرپواسونی است.

در شکل ۲ اثر انحنای فضا بر پارامتر مندل برای مقادیر مختلف J نشان داده شده است. در واقع با افزایش J و هم چنین افزایش انحنای فضا، سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتونها تقویت می‌شود. به عبارت دیگر، تا آنجا که به آمار شمارش فوتونها مربوط می‌شود، ویژگی‌های غیر کلاسیک حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ روی کره نسبت به

پارامترهای $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ و $\beta = \sqrt{1+\alpha^2}$ رابطه ویژه مقادیر انرژی (۶) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$E_n = \alpha(n+1)^2 + (n+1)\beta.$$

حال با توجه به اینکه $E_0 = \alpha + \beta \neq 0$ است، برای اینکه $e_0 = 0$ شود e_n ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_n = E_n - E_0 = \alpha \left[n^2 + \left(2 + \frac{\beta}{\alpha} \right) n \right].$$

اکنون با استفاده از تغییر متغیر $\mu = 2 + \frac{\beta}{\alpha}$ داریم:

$$e_n = n[n + \mu], \quad (12)$$

و متعاقباً با استفاده از رابطه (۱۱) به دست می‌آید:

$$\rho_n = n!(n + \mu)!, \quad (13)$$

که در آن داریم:

$$(n + \mu)! = (n + \mu)(n + \mu - 1)!. \quad (14)$$

ρ_n را می‌توان بر حسب تابع گاما به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_n = \frac{n! \Gamma(n + \mu + 1)}{\Gamma(n + \mu)}. \quad (15)$$

از این رو، حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر نوسانگر هماهنگ روی سطح کره به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$|J, \gamma\rangle = \frac{\Gamma(\mu+1)^{\frac{1}{2}}}{N(J)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^{\frac{n}{2}} e^{-i\gamma n(n+\mu)}}{[n! \Gamma(n + \mu + 1)]^{\frac{1}{2}}} |n\rangle. \quad (16)$$

لازم به ذکر است که $N(J)$ نیز از شرط بهنجارش به صورت زیر به دست می‌آیند:

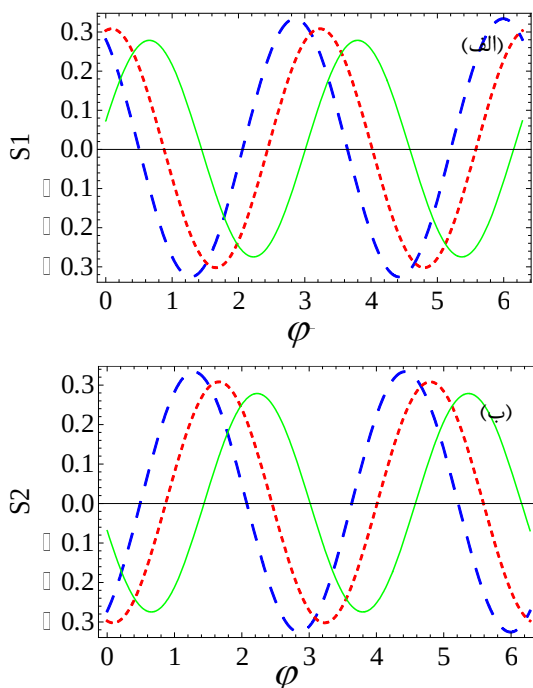
$$N^2(J) = \frac{\Gamma(n+1)}{J^{\frac{\mu}{2}}} I_{\mu}(2\sqrt{J}). \quad (17)$$

با جایگذاری $N^2(J)$ به دست آمده در رابطه‌ی (۱۶)، حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر مربوط به نوسانگر روی سطح کره به دست می‌آید:

$$|J, \gamma\rangle = \frac{J^{\frac{\mu}{4}}}{I_{\mu}(2\sqrt{J})^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^{\frac{n}{2}} e^{-i\gamma n(n+\mu)}}{[n! \Gamma(n + \mu + 1)]^{\frac{1}{2}}} |n\rangle. \quad (18)$$

به وضوح دیده می‌شود که رابطه بالا دارای هر چهار ویژگی حالت‌های همدوس است.

۴- خواص اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس $|J, \gamma\rangle$



شکل ۳: نمودار (الف) $S_1(\varphi)$ و (ب) $S_2(\varphi)$ برحسب φ به ازای $J=1$ برای $\lambda=0.04$ (خط توپر)، $\lambda=0.05$ (نقطه چین) و $\lambda=0.06$ (خط چین).

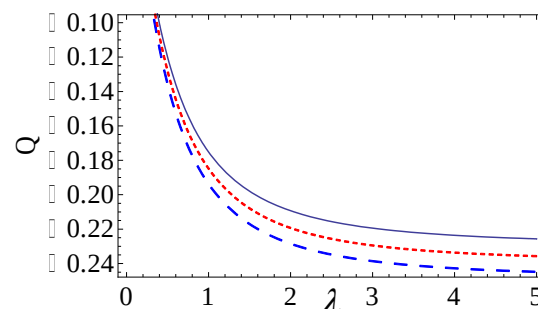
۵- نتیجه گیری

در این مقاله نشان داده شد که افزایش خمیدگی فضای فیزیکی (کره) سبب افزایش ویژگی‌های غیرکلاسیکی (پارامتر مندل و چلانگی) حالت‌های همدوس گازیو-کلادور به دست آمده می‌گردد. هم چنین افزایش J نیز، شمار میانگین فوتون‌ها را افزایش داده و باعث تقویت سرشت زیر پواسونی آمار شمارش فوتون‌ها می‌گردد.

مراجع

- [1] P. W. Higgs, *Dynamical symmetries in a spherical geometry*. I, J. Phys. A: Math. Gen. **12**, 309 (1979).
- [2] A. Mahdifar, R. Roknizadeh and M. H. Naderi, *Geometric approach to nonlinear coherent states using the Higgs model for harmonic oscillator*, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 7003, (2006).
- [3] J. P. Gazeau and R. Klauder, *Coherent states for Systems with discrete and continuous spectrum*, J. Phys. A: math. Gen. **32** (1999).
- [4] R. Roknizadeh, M.K. Tavassoly, *Construction of the dual family of Gazeau-Klauder coherent states via temporally stable nonlinear coherent states*, J. Math. Phys. **46**, 042110 (2005).
- [5] L. Mandel and E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [6] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ در فضای تخت، تقویت می‌شود.



شکل ۲: پارامتر مندل برای حالت‌های همدوس گازیو-کلادور برحسب λ برای $J=10$ (خط توپر)، $J=11$ (نقطه چین) و $J=12$ (خط چین).

۴-۳ چلانگی مولفه های کوادراتوری فوتون‌ها

عملگرهای کوراتوری $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر برحسب عملگرهای خلق و فنا تعریف می‌شوند:

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a}e^{i\varphi} + \hat{a}^+e^{-i\varphi}),$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a}e^{i\varphi} - \hat{a}^+e^{-i\varphi}). \quad (21)$$

چلانگی (کاهش نوفه های کوانتومی نسبت به حد استاندارد) را می‌توان برای عملگرهای بالا مورد بررسی قرار داد. شرط چلانگی مولفه های کوادراتوری چنین است. [۶]

$$(\square \hat{X}_i(\varphi))^2 < \frac{1}{4}[\hat{X}_1, \hat{X}_2]^2, \quad (i=1 \text{ یا } 2)$$

یا به طور هم ارز،

$$S_i(\varphi) = 4(\square \hat{X}_i(\varphi))^2 - [\hat{X}_1, \hat{X}_2]^2 < 0.$$

برای حالت همدوس مورد نظر، S_1 و S_2 به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$S_1 = 2\left|\langle a^2 \rangle\right| \cos(\theta + 2\varphi) + 2\langle n \rangle - \left(2\left|\langle a \rangle\right| \cos(\varphi + \psi)\right)^2,$$

$$S_2 = 2\left|\langle a^2 \rangle\right| \cos(\theta + 2\varphi) + 2\langle n \rangle - \left(2\left|\langle a \rangle\right| \cos(\varphi + \psi)\right)^2.$$

که در این روابط $\theta = \text{Arg}\langle a^2 \rangle$ و $\psi = \text{Arg}\langle a \rangle$ است.

در شکل‌های ۳-الف) و ۳-ب) به ترتیب $S_1(\varphi)$ و $S_2(\varphi)$ برحسب φ برای مقادیر مختلف λ رسم شده است. دیده می‌شود که با افزایش خمیدگی کره، بیشینه‌ی چلانگی افزایش یافته و علاوه بر این بیشینه به سمت φ های کمتر منتقل می‌شود.