



رهیافت ابرعملگرها در بررسی میزان خلوص سامانه‌ی برهمکنشی اتم-میدان در کاواک اتلافی و در حضور میدان لیزری کلاسیک خارجی

الناز آل‌ابراهیم دهکردی^۱ و فردین خیراندیش^۲

^۱ دانشگاه اصفهان، گروه فیزیک، خیابان هزار جریب، اصفهان

^۲ گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، دانشگاه اصفهان، اصفهان

چکیده - ابزار کلیدی در بسیاری از پروتکل‌ها در حوزه اطلاع‌رسانی کوانتومی وجود حالت‌های خالص با بیشینه درهمتنیدگی است. فرایند دوربری کوانتومی بر پایه حالت‌های اولیه با بیشینه خلوص و درهمتنیدگی استوار است. این در حالی است که فرایند اتلاف در حوزه‌ی اطلاع‌رسانی کوانتومی منجر به فروافت هم‌دوسی و سرکوبی ویژگی‌های کوانتومی می‌گردد. بررسی تحول دینامیکی سامانه‌های اتلافی در چارچوب معادله‌ی اصلی و معمولاً در قالب معادله‌ی فوکر-پلانک و لانژون صورت می‌گیرد. رهیافت ابرعملگرها در این حوزه کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله در رهیافتی مبتنی بر ابرعملگرها به بررسی تأثیر میدان لیزری کلاسیک خارجی بر میزان خلوص سامانه‌ی متشکل از اتم-میدان در یک کاواک اتلافی می‌پردازیم. میزان خلوص سامانه با کنترل لیزر خارجی افزایش می‌یابد ضمن آنکه فوتون‌های حرارتی در این فرایند منجر به کاهش خلوص سامانه می‌شوند.

کلید واژه - واهمدوسی، ابرعملگر، آنتروپی خطی

Super operator technique in Investigation of the purity of atom-field system in a dissipative cavity via an external classical laser field

Elnaz Ale ebrahim¹ and Fardin Kheirandish^{1,2}

¹Department of Physics, University of Isfahan, Isfahan

²Quantum Optics Group, University of Isfahan, Isfahan

Abstract- Many protocols in quantum information processing require pure, maximally entangled quantum states. For example, quantum teleportation often relies heavily on the purity and entanglement of the initial state. The process of decoherence is a subject of great importance in quantum mechanics, particularly in the fields of quantum information. The interaction of the quantum system with the reservoir leads to the decay of quantum coherences and suppression of quantum effects. To investigate the dynamics of the quantum dissipative systems, not much attention has been given to the use of superoperator techniques. Master equations in atom-field interaction are usually studied by using Fokker-Planck and Langevin equations. In this paper, based on superoperator techniques, we investigate the purity of an atom-field system, which is additionally driven by a classical field, in a dissipative cavity. It is shown that the purity of the system can be improved by applying the classical field. Our results also show the elimination of the laser's effect in the presence of thermal photons.

Keywords: decoherence, superoperator technique, linear entropy

۱- مقدمه

در این مقاله در رهیافت مبتنی بر ابرعملگرها به بررسی اثر یک میدان لیزری کلاسیک بر میزان خلوص سامانه برهمکنشی اتم- میدان در کاواک اتلافی می‌پردازیم. در روش مزبور جواب معادله‌ی اصلی از جبر حاکم بر ابرعملگرهایی بدست می‌آید که بر اساس فیزیک مسئله تعیین می‌شوند، به گونه‌ای که به منظور واتنیدگی^۱ عامل نمایشی ظاهر شده در عبارت مربوط به عملگر چگالی از این جبر بهره گرفته می‌شود [۲۹].

۲- رهیافت کلی

هامیلتونی سامانه برهمکنشی اتم- میدان درون کاواک اتلافی در دمای معین غیر صفر و در حضور یک میدان لیزری کلاسیک به صورت زیر است:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_c \hat{\sigma}_z / 2 + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + \hat{a} \hat{\sigma}^+) + \lambda(e^{-i\omega_c t} \hat{\sigma}^- + e^{+i\omega_c t} \hat{\sigma}^+), \quad \hbar = 1 \quad (۱)$$

$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$ عملگرهای اتمی هستند.

هامیلتونی سامانه در چارچوب مرجع چرخان تحت تبدیل

یکانی $U_1 = \exp(-i\omega_c t \hat{\sigma} / 2)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= U_1^\dagger \hat{H} U_1 - iU_1^\dagger \partial U_1 / \partial t = H_1^{(1)} + H_1^{(2)} \\ \hat{H}_1^{(1)} &= \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(e^{-i\omega_c t} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + e^{+i\omega_c t} \hat{a} \hat{\sigma}^+) \\ \hat{H}_1^{(2)} &= \Delta_1 \hat{\sigma}_z / 2 + \lambda(\hat{\sigma}^- + \hat{\sigma}^+) \end{aligned} \quad (۲)$$

در هامیلتونی حاصل $\Delta_1 = \omega_0 - \omega_c$ اختلاف بسامد میدان

لیزری و میدان اصلی است. هامیلتونی $H_1^{(2)}$ در پایه

حالت های پوشیده به صورت زیر قطری می‌شود:

$$\hat{H}_1^{(2)} = \Omega_1 \hat{\sigma}_z / 2 \quad (۳)$$

$\Omega_1 = (\Delta_1^2 + 4\lambda^2)^{1/2}$ به صورت تعیین می‌شود.

عملگرهای اتمی در پایه حالت های پوشیده به

صورت $\hat{\sigma}_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$, $\hat{\sigma}_+ = |0\rangle\langle 1|$ هستند و بسط

آنها بر حسب پایه های اصلی به روابط زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= -\sin\theta / 2 |e\rangle + \cos\theta / 2 |g\rangle \\ |0\rangle &= \cos\theta / 2 |e\rangle + \sin\theta / 2 |g\rangle \end{aligned} \quad (۴)$$

هامیلتونی کل $\hat{H}_1$ در پایه حالت های پوشیده و در تقریب

موج چرخان به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Omega_1 \hat{\sigma}_z / 2 + g \cos^2 \theta / 2 \\ &\times (e^{-i\omega_c t} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + e^{+i\omega_c t} \hat{a} \hat{\sigma}^+) \end{aligned} \quad (۵)$$

^۱disentanglement

در نهایت هامیلتونی $\hat{H}_1$ را تحت تبدیل یکانی

$U_2 = \exp(i\omega_c t \hat{\sigma} / 2)$ به شکل زیر قرار می‌دهیم.

$$\hat{H}_2 = U_2^\dagger \hat{H}_1 U_2 - iU_2^\dagger \partial U_2 / \partial t \quad (۶)$$

$$= \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega' \hat{\sigma}_z / 2 + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + \hat{a} \hat{\sigma}^+)$$

در هامیلتونی $\omega' = \omega_c + \Omega_1$ و $g' = g \cos^2 \theta / 2$ هستند.

در رژیم پاشنده $g = | \omega' - \omega |^{1/2} (n+1)$ با تعریف Ω

به صورت $\Omega = (g \cos^2 \theta / 2)^2 / \Delta_2$ به شکل زیر

تبدیل خواهد شد:

$$\hat{H}_e = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega' \hat{\sigma}_z / 2 \quad (۷)$$

$$+ \Omega((\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1)|0\rangle\langle 0| - \hat{a} \hat{a}^\dagger |1\rangle\langle 1|)$$

هامیلتونی برهمکنش مؤثر در (۷) به صورت زیر است [۳]:

$$\hat{H}_e^{\text{int}} = \Omega((\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1)|0\rangle\langle 0| - \hat{a} \hat{a}^\dagger |1\rangle\langle 1|) \quad (۸)$$

۳- دینامیک سامانه

به منظور بررسی دینامیک سامانه در حضور دو عامل

اتلاف، یعنی فوتونهای حرارتی و فرایند گسیل خودبخودی

درون کاواک، در رهیافت ابرعملگرها ابتدا به حل معادله

اصلی و تعیین عناصر ماتریس چگالی می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} d\hat{\rho} / dt &= -i[\hat{H}_e^{\text{int}}, \hat{\rho}] \\ &+ \gamma n(2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &+ \gamma(n+1)(2\hat{a}^\dagger \hat{\rho} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a} \hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (۹)$$

نمایش ماتریس چگالی به شکل زیر

$$\begin{aligned} d\hat{\rho} / dt &= \hat{\rho}_{00}(t) \otimes |0\rangle\langle 0| + \hat{\rho}_{11}(t) \otimes |1\rangle\langle 1| \\ &+ \hat{\rho}_{01}(t) \otimes |0\rangle\langle 1| + \hat{\rho}_{10}(t) \otimes |1\rangle\langle 0| \end{aligned}$$

منجر به نمایش عناصر ماتریس چگالی در پایه حالت های

پوشیده اتمی به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}_{00}(t) &= -i\Omega[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_{00}] + \hat{L}_1 \hat{\rho}_{00} + \hat{L}_2 \hat{\rho}_{00} \\ \dot{\hat{\rho}}_{11}(t) &= +i\Omega[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_{11}] + \hat{L}_1 \hat{\rho}_{11} + \hat{L}_2 \hat{\rho}_{11} \\ \dot{\hat{\rho}}_{01}(t) &= (\gamma - i\Omega)\hat{\rho}_{01} - i\Omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{01} + \hat{\rho}_{01} \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &+ \hat{L}_1 \hat{\rho}_{01} + \hat{L}_2 \hat{\rho}_{01} \\ \dot{\hat{\rho}}_{10}(t) &= \dot{\hat{\rho}}_{01}^\dagger(t) \end{aligned} \quad (۱۰)$$

به منظور تعیین $\hat{\rho}_{00}(t)$ به روش عملگری در گام نخست

به معرفی ابرعملگرهای زیر می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \hat{Y} \hat{\rho}_{00} &= -i\Omega[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_{00}] \\ \hat{J}^3 \hat{\rho}_{00} &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{00} + \hat{\rho}_{00} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\rho}_{00} \\ \hat{J}^+ \hat{\rho}_{00} &= \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_{00} \hat{a}, \quad \hat{J}^- \hat{\rho}_{00} = \hat{a} \hat{\rho}_{00} \hat{a}^\dagger \end{aligned} \quad (۱۱)$$

این ابرعملگرهای روابط جابجایی زیر را برآورده می‌کنند:

$$\hat{\rho}_{01}(t) = \text{Exp} [((\gamma - i\Omega) + \hat{B} + 2\gamma(n+1)\hat{J}^- + 2\gamma(n)\hat{J}^+ - \gamma(2n+1)\hat{J}^3)t] \hat{\rho}_{01}(0) \quad (19)$$

به منظور تفکیک عامل نمایی شکل زیر را برای $\hat{\rho}_{01}(t)$ پیشنهاد می‌کنیم:

$$\hat{\rho}_{01}(t) = (\exp[(\gamma - i\Omega)t] \exp[(g^+(t)\hat{J}_2^+]) \exp[g\hat{B}] \exp[g^3(t)\hat{J}_2^3] \times \exp[g^-(t)\hat{J}_2^-]) \hat{\rho}_{01}(0)$$

در رابطه‌ی بالا وابستگی زمانی توابع به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$g(t) = t$$

$$g^+(t) = \frac{\bar{n} \exp(-2i\Omega t)(1 - \exp(-2\gamma t))}{1 + \bar{n}(1 + \exp(-2\gamma t))} \quad (20)$$

$$g^3(t) = \gamma t - \ln[(\bar{n} + 1) \exp(+2\gamma t) - n]$$

$$g^-(t) = \frac{(\bar{n} + 1)(1 - \exp(-2\gamma t))}{1 + \bar{n}(1 + \exp(-2\gamma t))} + i\Omega$$

$$\{\exp(-2(i\Omega + \gamma))R_1 - R_2\} / (i\Omega + \gamma)(\bar{n} + 1)$$

که توابع $R_1(t)$ و $R_2(t)$ به شکل زیر تعیین می‌شوند:

$$R_1(t) = \Gamma((2 + i\Omega) / \gamma) / \Gamma((2 + i\Omega) / \gamma - 1) \times \int_0^1 (1-t)^{(2+i\Omega)/\gamma-2} (1 - \frac{ne^{(-2\gamma t)}t}{(1+n)})^{-(\gamma+i\Omega)/\gamma} dt$$

$$R_2(t) = \Gamma((2 + i\Omega) / \gamma) / \Gamma((2 + i\Omega) / \gamma - 1) \times \int_0^1 (1-t)^{(2+i\Omega)/\gamma-2} (1 - \frac{nt}{(1+n)})^{-(\gamma+i\Omega)/\gamma} dt$$

در نهایت عناصر ماتریس چگالی در پایه حالت‌های عددی صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\hat{\rho}_{00}(t) = e^{\gamma t} \sum_{s,m,l,k=0}^{\infty} \hat{\rho}_{00}^{s+k-l, m+k-l}_{(0)} e^{-i\Omega(s-m)t} e^{f^3(s+m-2l+1)t}$$

$$\frac{\sqrt{(s+k-l)!(m+k-l)!s!m!}}{(s-l)!(m-l)!k!l!} (f^+)^l (f^-)^k |s\rangle \langle m|$$

$$\hat{\rho}_{11}(t) = e^{\gamma t} \sum_{s,m,l,k=0}^{\infty} \hat{\rho}_{11}^{s+k-l, m+k-l}_{(0)} e^{+i\Omega(s-m)t} e^{f^3(s+m-2l+1)t}$$

$$\frac{\sqrt{(s+k-l)!(m+k-l)!s!m!}}{(s-l)!(m-l)!k!l!} (f^+)^l (f^-)^k |s\rangle \langle m|$$

$$\hat{\rho}_{01}(t) = e^{\gamma t} \sum_{s,m,l,k=0}^{\infty} \hat{\rho}_{01}^{s+k-l, m+k-l}_{(0)} e^{-i\Omega(s+m)t} e^{g^3(s+m-2l+1)t}$$

$$\frac{\sqrt{(s+k-l)!(m+k-l)!s!m!}}{(s-l)!(m-l)!k!l!} e^{-i\Omega t} (g^+)^l (g^-)^k |s\rangle \langle m|$$

$$[\hat{J}^+, \hat{J}^-] \hat{\rho}_{00} = \hat{J}^3 \hat{\rho}_{00}, [\hat{J}^3, \hat{J}^\pm] \hat{\rho}_{00} = \pm 2\hat{J}^\pm \hat{\rho}_{00}$$

$$[\hat{Y}, \hat{J}^\pm] \hat{\rho}_{00} = [\hat{Y}, \hat{J}^3] \hat{\rho}_{00} = 0 \quad (12)$$

$\hat{\rho}_{00}(t)$ را برحسب ابرعملگرهای معرفی شده در (۲) بازنویسی می‌کنیم:

$$\dot{\hat{\rho}}_{00}(t) = [\gamma \hat{\rho}_{00}(t) + \hat{Y} \hat{\rho}_{00}(t) + 2\gamma(n)\hat{J}^+ \hat{\rho}_{00}(t) + 2\gamma(n+1)\hat{J}^- \hat{\rho}_{00}(t) - \gamma(2n+1)\hat{J}^3 \hat{\rho}_{00}(t)] \quad (13)$$

که حل آن منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\hat{\rho}_{00}(t) = \exp [(\hat{Y} + 2\gamma(n)\hat{J}^+ + 2\gamma(n+1)\hat{J}^- - \gamma(2n+1)\hat{J}^3 + \gamma)t] \hat{\rho}_{00}(0)$$

به منظور تفکیک عامل نمایی شکل زیر را برای $\hat{\rho}_{00}(t)$ پیشنهاد می‌کنیم:

$$\hat{\rho}_{00}(t) = \exp[\gamma t] \times \exp[\hat{Y}t] \times \exp[(f^+(t)\hat{J}^+)] \times \exp[f^3(t)\hat{J}^3] \times \exp[f^-(t)\hat{J}^-] \hat{\rho}_{00}(0) \quad (14)$$

از رابطه‌ی (۱۴) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم، برای این منظور از روابط جابجایی (۱۲) و لم B.C.H استفاده می‌کنیم. از مقایسه رابطه حاصل با (۱۳) یک دستگاه سه معادله - سه مجهول برای تعیین توابع وابسته به زمان خواهیم داشت. حل معادله‌ی غیرخطی ریکاتی برای $f^+(t)$ منجر به تعیین $f^-(t)$ و $f^3(t)$ نیز به صورت زیر می‌شود:

$$f^+(t) = \frac{\bar{n}(1 - \exp(-2\gamma t))}{1 + \bar{n}(1 + \exp(-2\gamma t))}$$

$$f^-(t) = \frac{(\bar{n} + 1)(1 - \exp(-2\gamma t))}{1 + \bar{n}(1 + \exp(-2\gamma t))}$$

$$f^3(t) = \gamma t - \ln[(\bar{n} + 1) \exp(+2\gamma t) - n] \quad (15)$$

در گام بعد به منظور تعیین عنصر بعدی ماتریس چگالی به معرفی ابرعملگرها به صورت زیر می‌پردازیم

$$\hat{B} \hat{\rho}_{01} = -i\Omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{01} + \hat{\rho}_{01} \hat{a}^\dagger \hat{a})$$

$$\hat{J}^3 \hat{\rho}_{01} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{01} + \hat{\rho}_{01} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\rho}_{01}$$

$$\hat{J}^+ \hat{\rho}_{01} = \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_{01} \hat{a}, \hat{J}^- \hat{\rho}_{01} = \hat{a} \hat{\rho}_{01} \hat{a}^\dagger \quad (16)$$

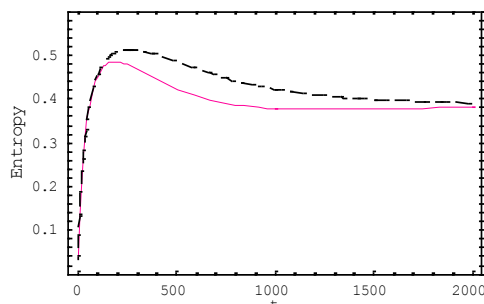
این ابرعملگرهای روابط جابجایی زیر را برآورده می‌کنند:

$$[\hat{B}, \hat{J}^3] \hat{\rho}_{01} = 0, [\hat{B}, \hat{J}^\pm] \hat{\rho}_{01} = \mp 2i\Omega \hat{J}^\pm \hat{\rho}_{01} \quad (17)$$

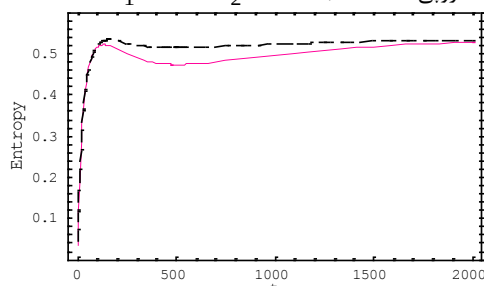
$\dot{\hat{\rho}}_{01}(t)$ را بر حسب ابرعملگرهای (۱۶) بازنویسی می‌کنیم:

$$\dot{\hat{\rho}}_{01}(t) = [(\gamma - i\Omega)\hat{\rho}_{01} + 2\gamma(n+1)\hat{J}^- \hat{\rho}_{01} + \hat{B} \hat{\rho}_{01} + 2\gamma(n)\hat{J}^+ \hat{\rho}_{01} - \gamma(2n+1)\hat{J}^3 \hat{\rho}_{01}] \quad (18)$$

که حل آن منجر به رابطه مقابل می‌شود:



۳) کاهش آنتروپی $\Omega_1 = .001$ $\Omega_2 = .0003$ $\gamma = .001$ $n = 3$



۴) کاهش آنتروپی $\Omega_1 = .001$ $\Omega_2 = .0003$ $\gamma = .001$ $n = 5$

در نمودارهای بالا Ω_1 , Ω_2 ثابت‌های جفت شدگی مؤثر اتم-میدان در حضور و عدم حضور میدان لیزر خارجی هستند. n بیانگر تعداد فوتون‌های حرارتی و γ ثابت جفت شدگی سامانه با اتلافگر است.

۴- نتایج

در بسیاری از پروتکل‌های اطلاع‌رسانی کوانتومی نیازمند حالت‌هایی با بیشینه خلوص و درهم‌تنیدگی هستیم. در مطالعه حاضر در رهیافتی مبتنی بر ابرعملگرها که در سال‌های اخیر کمتر از روش‌های متداول دیگر در تحلیل دینامیک سامانه‌ی اتم-میدان مورد استفاده قرار گرفته است، به بررسی تأثیر میدان لیزری کلاسیک خارجی در میزان خلوص سامانه پرداختیم. مشاهده گردید که اعمال میدان لیزری کلاسیک سبب افزایش خلوص سامانه می‌شود ضمن آنکه که افزایش فوتون‌های حرارتی به عنوان یک عامل اتلافی سبب سرکوب این ویژگی به عنوان یک ویژگی کوانتومی می‌شوند.

سپاسگزاری

در پایان لازم می‌دانیم که مراتب تشکر خود را از بخش تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان به سبب حمایت-هایشان در حین تحقیقات به‌جای آوریم.

مراجع

- [1] S. Mancini, D. Vitali Phys. Rev. B 71 (2005) 054406.
- [2] H.Moya-Cessa, Phy.Rep.432,(2006)1-14
- [3] R.R. Puri, in: Mathematical Methods of Quantum Optics, Springer, Berlin, 2001.

$$\hat{\rho}_{10}(t) = e^{\gamma t} \sum_{\substack{s,m, \\ l,k=0}}^{\infty} \hat{\rho}_{10}^{s+k-l, m+k-l}(0) e^{-i\Omega(s+m)t} e^{g^3(s+m-2l+1)t}$$

$$\frac{\sqrt{(s+k-l)!(m+k-l)!s!m!}}{(s-l)!(m-l)!k!l!} e^{-i\Omega t} (g^+)^l (g^-)^k |s\rangle \langle m| \quad (21)$$

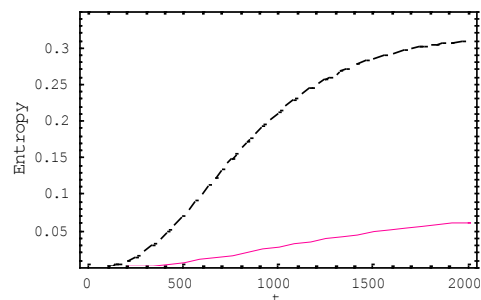
در ادامه به بررسی میزان خلوص سامانه در حضور میدان لیزری کلاسیک و عوامل اتلافی می‌پردازیم. با در نظر گرفتن حالت اولیه‌ی سامانه به صورت حالت همدوس هر یک از عناصر ماتریس چگالی در پایه حالت‌های عددی به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{00}(0) &= \hat{\rho}_{11}(0) = \hat{\rho}_{01}(0) = \hat{\rho}_{10}(0) = |\alpha\rangle \langle \alpha| / 2 \\ \hat{\rho}_{00}^{s+k-l, m+k-l}(0) &= \langle s+k-l | \hat{\rho}_{00} | m+k-l \rangle = \\ &= (\exp[-|\alpha|^2] \alpha^{s+k-l} (\alpha^*)^{m+k-l}) / \end{aligned} \quad (22)$$

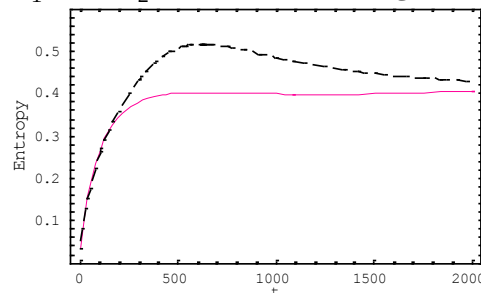
$2\sqrt{(s+k-l)!(m+k-l)!}$
آنتروپی خطی سامانه اتم-میدان معرف میزان خلوص سامانه است و به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$S_a(t) = 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}^2(t)) = 1 - \hat{\rho}_{00}^2(t) - \hat{\rho}_{11}^2(t) - 2|\hat{\rho}_{01}^2(t)|^2 \quad (23)$$

نمودارهای زیر بیانگر میزان خلوص سامانه در حضور (-) و عدم حضور (- - -) میدان لیزری کلاسیک هستند. ضمن آنکه تأثیر فوتون‌های حرارتی در کاهش این اثر کوانتومی قابل مشاهده است.



۱) کاهش آنتروپی $\Omega_1 = .001$ $\Omega_2 = .0003$ $\gamma = .001$ $n = 0$



۲) کاهش آنتروپی $\Omega_1 = .001$ $\Omega_2 = .0003$ $\gamma = .001$ $n = 1$